KEMENTERIAN
PENDIDIKAN
MALAYSIA

MATEMATIK
TINGKATAN 4

MATEMATIK TINGKATAN 4

KSSM
KURIKULUM STANDARD SEKOLAH MENENGAH
KEMENTERIAN PENDIDIKAN MALAYSIA

RM9.50
ISBN 9789674900878
9 789674 900878
FT084002

KURIKULUM STANDARD SEKOLAH MENENGAH

MATEMATIK
TINGKATAN 4

Penulis
Yeow Pow Choo
Thavamani A/P Renu
Kamalah A/P Raman
Wong Jin Wen
Vincent De Selva A/L Santhanasamy

Editor
Premah A/P Rasamanie
Cynthia Cheok Ching Tuing

Pereka Bentuk
Yan Noryana Mohamad

Ilustrator
Asparizal Bin Mohamed Sudin
Mohammad Kamal Bin Ahmad

Pustaka Yakin Pelajar Sdn. Bhd. (10146 M)

2019

KEMENTERIAN
PENDIDIKAN
MALAYSIA

No. Siri Buku: 0091

KPM2019 ISBN 978-967-490-087-8
Cetakan Pertama 2019
© Kementerian Pendidikan Malaysia

Hak Cipta Terpelihara. Mana-mana bahan dalam buku ini tidak dibenarkan diterbitkan semula, disimpan dalam cara yang boleh dipergunakan lagi, ataupun dipindahkan dalam sebarang bentuk atau cara, baik dengan cara elektronik, mekanik, penggambaran semula mahupun dengan cara perakaman tanpa kebenaran terlebih dahulu daripada Ketua Pengarah Pelajaran Malaysia, Kementerian Pendidikan Malaysia. Perundingan tertakluk kepada perkiraan royalti atau honorarium.

Diterbitkan untuk Kementerian Pendidikan Malaysia oleh:
PUSTAKA YAKIN PELAJAR SDN. BHD.
No. 4, Jalan TS 6/4, Taman Industri Subang,
47600 Subang Jaya,
Selangor Darul Ehsan.

Reka Letak dan Atur Huruf:
PUSTAKA YAKIN PELAJAR SDN. BHD.
Muka taip teks: Times New Roman
Saiz taip teks: 11 poin

Dicetak oleh:
PERCETAKAN HAJI JANTAN SDN. BHD. (170526-W)
No. 12, Jalan 4/118C, Desa Tun Razak,
56000 Cheras, Kuala Lumpur,
Malaysia.

PENGHARGAAN

Penerbitan buku teks ini melibatkan kerjasama banyak pihak. Sekalung penghargaan dan terima kasih ditujukan kepada semua pihak yang terlibat:

- Jawatankuasa Penambahbaikan Pruf Muka Surat, Bahagian Buku Teks, Kementerian Pendidikan Malaysia.
- Jawatankuasa Penyemakan Pembetulan Pruf Muka Surat, Bahagian Buku Teks, Kementerian Pendidikan Malaysia.
- Jawatankuasa Penyemakan Naskhah Sedia Kamera, Bahagian Buku Teks, Kementerian Pendidikan Malaysia.
- Pegawai-pegawai Bahagian Buku Teks dan Bahagian Pembangunan Kurikulum, Kementerian Pendidikan Malaysia.
- Ahli panel penilaian dan peningkatan mutu.
- Bahagian Editorial dan Bahagian Produksi, terutamanya pereka bentuk dan ilustrator.
- Semua pihak yang terlibat secara langsung atau tidak langsung dalam menjayakan penerbitan buku ini.

Kandungan

Pendahuluan v

Simbol dan Rumus vii

BAB 1 **Fungsi dan Persamaan Kuadratik dalam Satu Pemboleh Ubah** **1**

1.1 Fungsi dan Persamaan Kuadratik 2

BAB 2 **Asas Nombor** **32**

2.1 Asas Nombor 34

BAB 3 **Penaakulan Logik** **54**

3.1 Pernyataan 56
3.2 Hujah 71

BAB 4 **Operasi Set** **94**

4.1 Persilangan Set 96
4.2 Kesatuan Set 106
4.3 Gabungan Operasi Set 116

BAB 5 **Rangkaian dalam Teori Graf** **128**

5.1 Rangkaian 130

BAB 6 Ketaksamaan Linear dalam Dua Pemboleh Ubah **154**

6.1 Ketaksamaan Linear dalam Dua Pemboleh Ubah 156
6.2 Sistem Ketaksamaan Linear dalam Dua Pemboleh Ubah 165

BAB 7 Graf Gerakan **182**

7.1 Graf Jarak-Masa 184
7.2 Graf Laju-Masa 195

BAB 8 Sukatan Serakan Data Tak Terkumpul **210**

8.1 Serakan 212
8.2 Sukatan Serakan 219

BAB 9 Kebarangkalian Peristiwa Bergabung **242**

9.1 Peristiwa Bergabung 244
9.2 Peristiwa Bersandar dan Peristiwa Tak Bersandar 246
9.3 Peristiwa Saling Eksklusif dan Peristiwa Tidak Saling Eksklusif 253
9.4 Aplikasi Kebarangkalian Peristiwa Bergabung 262

BAB 10 Matematik Pengguna: Pengurusan Kewangan **270**

10.1 Perancangan dan Pengurusan Kewangan 272

Jawapan **293**
Glosari **309**
Senarai Rujukan **311**
Indeks **312**

Muat turun aplikasi percuma daripada layaran berkaitan ke peranti mudah alih pintar anda.

Nota: Murid boleh muat turun perisian dinamik yang berkaitan percuma untuk membuka fail yang berkenaan.

http://yakin-pelajar.com/Ting4

Pendahuluan

Buku teks Matematik Tingkatan 4 ini ditulis berdasarkan Kurikulum Standard Sekolah Menengah (KSSM). Buku ini terdiri daripada 10 bab yang disusun dan dirancang secara sistematik berdasarkan Dokumen Standard Kurikulum dan Pentaksiran (DSKP) Matematik Tingkatan 4.

Pada permulaan bab, murid akan diperkenalkan kepada bahan rangsangan yang berkaitan dengan kehidupan harian untuk merangsang pemikiran murid tentang konsep sesuatu topik. Di samping itu, standard kandungan dan daftar kata turut disertakan untuk memberikan gambaran ringkas tentang kandungan bab.

Buku ini mengandungi ciri-ciri istimewa berikut:

	Penerangan
Anda akan mempelajari	mengandungi standard kandungan yang akan dipelajari dalam setiap bab
Maslahat Bab	kepentingan ilmu dan kemahiran yang akan dipelajari dalam bab ini untuk diaplikasikan dalam kehidupan seharian dan alam kerjaya pada masa depan
Imbasan Silam	sejarah ilmuwan terdahulu atau asal usul penerokaan bab ini dalam mata pelajaran Matematik
JARINGAN KATA	daftar kata yang terkandung dalam setiap bab
Rangsangan Minda	membantu murid memahami konsep asas matematik melalui aktiviti individu, berpasangan atau kumpulan
ZON INFORMASI	memberikan maklumat tambahan yang berkaitan dengan bab yang dipelajari
TIP	mendedahkan pengetahuan tambahan yang perlu diketahui kepada murid
Indikator	menarik perhatian murid kepada fakta tambahan yang perlu diketahui, kesilapan yang sering dilakukan murid dan mengelakkan kecuaian murid

	Penerangan
	mengemukakan soalan yang merangsang minda murid untuk berfikir secara kritis dan kreatif
	membina kemahiran berkomunikasi secara matematik
	membantu murid untuk mengingat perkara yang telah dipelajari
	konsep matematik yang berkaitan dengan pencapaian Malaysia
	membolehkan murid menjalankan tugasan dan membentangkan hasil semasa pembelajaran
	menguji kefahaman murid terhadap konsep yang telah dipelajari
	soalan latihan yang berunsurkan kepelbagaian aras kemahiran berfikir
	QR Code yang dapat diimbas dengan menggunakan aplikasi dalam peranti mudah alih pintar
	merangkumi konsep penggunaan aplikasi digital, kalkulator, *hands on* dan permainan yang bertujuan untuk memberikan aktiviti tambahan kepada murid untuk mempertingkatkan pemahaman murid dengan lebih berkesan
	rumusan keseluruhan bab yang telah dipelajari
	melihat standard pembelajaran yang telah dipelajari kembali sama ada tercapai atau tidak
	menyemak jawapan dengan kaedah alternatif
	soalan Kemahiran Berfikir Aras Tinggi (KBAT) untuk menguji kemahiran murid

Simbol dan Rumus

Simbol

$=$	sama dengan	$\in$	unsur	$n(A)$	bilangan unsur set A
$\neq$	tidak sama dengan	$\notin$	bukan unsur	Σ	(sigma) jumlah
$\approx$	hampir sama dengan	ξ	set semesta	σ^2	(sigma) varians
$>$	lebih besar daripada	$\subset$	subset	$\bar{x}$	(x bar) min
$<$	kurang daripada	$\not\subset$	bukan subset	e	tepi
$\geqslant$	lebih besar atau sama dengan	A'	pelengkap set A	G	graf
$\leqslant$	kurang atau sama dengan	$\{\ \}, \phi$	set kosong	v	bucu
$\sim$	(Tilda) penafian	$\cap$	persilangan	d	darjah
$p \Rightarrow q$	jika p, maka q	$\cup$	kesatuan		
$p \Leftrightarrow q$	p jika dan hanya jika q				

Rumus

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$n(A') = n(\xi) - n(A)$

$n(A' \cap B') = n(A \cup B)'$

$n(A' \cup B') = n(A \cap B)'$

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$

Peristiwa pelengkap, $P(A') = 1 - P(A)$

$P(A \text{ dan } B) = P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$P(A \text{ atau } B) = P(A \cup B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Sigma d(v) = 2E;\ v \in V$

Kecerunan, $m = \dfrac{\text{Jarak mencancang}}{\text{Jarak mengufuk}}$

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m = -\dfrac{\text{Pintasan-}y}{\text{Pintasan-}x}$

$\text{Laju} = \dfrac{\text{Jarak}}{\text{Masa}}$

$\text{Laju purata} = \dfrac{\text{Jumlah jarak}}{\text{Jumlah masa}}$

$\text{Pecutan} = \dfrac{\text{Perubahan laju}}{\text{Perubahan masa}}$

$\bar{x} = \dfrac{\Sigma x}{N}$

$\bar{x} = \dfrac{\Sigma fx}{\Sigma f}$

varians, $\sigma^2 = \dfrac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{N} = \dfrac{\Sigma x^2}{N} - \bar{x}^2$

varians, $\sigma^2 = \dfrac{\Sigma f(x - \bar{x})^2}{\Sigma f} = \dfrac{\Sigma fx^2}{\Sigma f} - \bar{x}^2$

Sisihan piawai, $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\dfrac{\Sigma x^2}{N} - \bar{x}^2}$

Sisihan piawai, $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma f(x - \bar{x})^2}{\Sigma f}} = \sqrt{\dfrac{\Sigma fx^2}{\Sigma f} - \bar{x}^2}$

Fungsi dan Persamaan Kuadratik dalam Satu Pemboleh Ubah

Anda akan mempelajari

► Fungsi dan Persamaan Kuadratik

Pulau Warisan terletak di Kuala Terengganu. Pulau ini menjadi daya tarikan baharu bagi para pelancong kerana merupakan sebuah pulau buatan manusia yang dihubungkan dengan jambatan. Jambatan ini mirip seperti jambatan di Putrajaya.

Tahukah anda bahawa bentuk binaan jambatan ini mempunyai ciri-ciri matematik yang istimewa?

Maslahat Bab

Fungsi dan persamaan kuadratik banyak digunakan dalam bidang sains, perniagaan, sukan dan sebagainya. Dalam arena sukan, fungsi kuadratik menjadi penting dalam acara-acara sukan seperti lontar peluru, lempar cakera, merejam lembing dan sebagainya. Dalam seni bina pula, kita sering melihat binaan melengkung berbentuk parabola yang sebenarnya amat berkait rapat dengan penguasaan konsep kuadratik.

Imbasan Silam

Al-Khawarizmi
(780 M - 850 M)

Al-Khawarizmi terkenal dengan gelaran Bapa Algebra. Beliau merupakan pengasas kepada beberapa cabang dan konsep matematik. Hasil kerjanya dalam algebra begitu cemerlang dan beliau bukan sahaja mempunyai inisiatif terhadap subjek dalam pembentukan sistematik tetapi juga bertanggungjawab membangunkan penyelesaian analitikal dalam perkembangan garis lurus serta persamaan kuadratik.

http://yakin-pelajar.com/Khwarizmi/1.pdf

JARINGAN KATA

• fungsi kuadratik	• *quadratic function*
• paksi simetri	• *axis of symmetry*
• pemboleh ubah	• *variable*
• punca	• *root*
• titik maksimum	• *maximum point*
• titik minimum	• *minimum point*

1.1 Fungsi dan Persamaan Kuadratik

Apakah ungkapan kuadratik dalam satu pemboleh ubah?

Standard Pembelajaran

Mengenal pasti dan menerangkan ciri-ciri ungkapan kuadratik dalam satu pemboleh ubah.

Pernahkah anda melakar gerakan sebiji bola yang ditendang oleh seorang pemain seperti yang ditunjukkan dalam gambar rajah di sebelah?

Bentuk gerakan ini dikenali sebagai bentuk parabola.

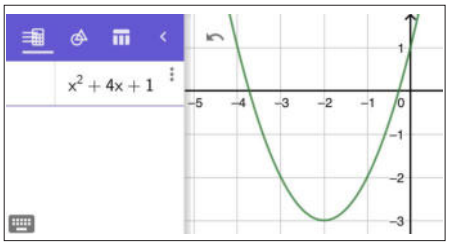
Tahukah anda, bentuk parabola ini mempunyai persamaan tersendiri seperti persamaan garis lurus?

Rangsangan Minda 1

Tujuan: Mengenal pasti dan menerangkan ciri-ciri ungkapan kuadratik dalam satu pemboleh ubah.

Langkah:

1. Berdasarkan jadual dalam langkah 3, masukkan semua ungkapan satu demi satu dalam perisian geometri dinamik seperti di bawah.



Imbas *QR Code* untuk menjalankan aktiviti ini. *https://www.geogebra.org/graphing*

2. Teliti graf yang diperoleh.
3. Lengkapkan jadual di bawah.

Ungkapan		Ciri-ciri	
		Bentuk graf	Koordinat titik paling rendah atau paling tinggi (jika ada)
(a)	$x^2 + 4x + 1$		
(b)	$x^{-2} - 1$		
(c)	$-2x^2 - 2x + 5$		
(d)	$5x + 4$		
(e)	$3x^2 - 2$		
(f)	$-2x^2 + 4x$		
(g)	$x^3 + 1$		

Perbincangan:

Graf suatu ungkapan kuadratik ialah $\cup$ atau $\cap$ dan mempunyai satu titik paling tinggi atau satu titik paling rendah. Ungkapan yang manakah merupakan ungkapan kuadratik? Berikan justifikasi anda.

Hasil daripada Rangsangan Minda 1, didapati bahawa;

Ungkapan kuadratik dalam satu pemboleh ubah ialah ungkapan yang **kuasa tertinggi** pemboleh ubahnya ialah **dua**.

Secara generalisasi,

Bentuk am suatu ungkapan kuadratik ialah, $ax^2 + bx + c$.

Dengan keadaan;
a, b dan c ialah pemalar dan $a \neq 0$
x ialah pemboleh ubah.

ZON INTERAKTIF

Mengapakah nilai $a \neq 0$ bagi suatu ungkapan kuadratik? Bincangkan.

Contoh:

$x^2 + 2x - 1$, $-y^2 + 3y$, $\frac{1}{3}m^2 - m + 4$ dan $2n^2 + 5$ merupakan antara contoh ungkapan kuadratik.

TIP

Selain x, huruf lain juga boleh digunakan sebagai pemboleh ubah.

Contoh 1

Tentukan sama ada setiap ungkapan berikut merupakan ungkapan kuadratik dalam satu pemboleh ubah atau bukan. Jika bukan, berikan justifikasi anda.

(a) $2x^2 + 5$

(b) $x^3 - 6$

(c) $3x^2 + 2y + 1$

(d) $\frac{1}{2}m^2$

(e) $2x^2 - \frac{3}{x^2}$

(f) $4x^2 - x^{\frac{1}{2}}$

TIP

Nilai pemalar b dan c boleh sifar.

MEMORI SAYA

$\frac{3}{x^2} = 3x^{-2}$

$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

Penyelesaian:

(a) $2x^2 + 5$ ialah ungkapan kuadratik dalam satu pemboleh ubah.

(b) $x^3 - 6$ bukan ungkapan kuadratik kerana kuasa tertinggi pemboleh ubah ialah tiga.

(c) $3x^2 + 2y + 1$ bukan ungkapan kuadratik dalam satu pemboleh ubah kerana terdapat dua pemboleh ubah iaitu x dan y.

(d) $\frac{1}{2}m^2$ ialah ungkapan kuadratik dalam satu pemboleh ubah.

(e) $2x^2 - \frac{3}{x^2}$ bukan ungkapan kuadratik kerana terdapat kuasa yang bukan nombor bulat.

(f) $4x^2 - x^{\frac{1}{2}}$ bukan ungkapan kuadratik kerana terdapat kuasa yang bukan nombor bulat.

Rangsangan Minda 2

Tujuan: Menyatakan nilai *a, b* dan *c* dalam suatu ungkapan kuadratik.

Langkah:

1. Teliti (a) dalam jadual di bawah.
2. Tentukan nilai *a, b* dan *c* bagi ungkapan kuadratik yang seterusnya.

	Ungkapan kuadratik	Perbandingan
(a)	$2x^2 - 3x + 1$	$2x^2 - 3x + 1$ $ax^2 + bx + c$ $a =$ 2 $b =$ –3 $c =$ 1
(b)	$2x^2 - 4$	$\square x^2 + \square x + \square$ $ax^2 + bx + c$ $a =$ $b =$ $c =$
(c)	$\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{3}{2}$	$a =$ $b =$ $c =$
(d)	$-x^2 + x$	$a =$ $b =$ $c =$
(e)	$-x^2 - 3x - 9$	$a =$ $b =$ $c =$
(f)	$\frac{1}{2}x^2$	$a =$ $b =$ $c =$

Perbincangan:

Bagaimanakah anda menentukan nilai-nilai *a, b* dan *c*?

Hasil daripada Rangsangan Minda 2, didapati bahawa;

Semua ungkapan kuadratik boleh ditulis dalam bentuk $ax^2 + bx + c$ dengan keadaan $a \neq 0$.

Dalam ungkapan kuadratik,

a ialah pekali x^2,
b ialah pekali *x*,
c ialah pemalar.

ZON INTERAKTIF

Mengapakah *a* dan *b* disebut pekali dan *c* disebut pemalar?

Praktis Kendiri 1.1a

1. Tentukan sama ada setiap ungkapan berikut merupakan ungkapan kuadratik dalam satu pemboleh ubah atau bukan. Jika bukan, berikan justifikasi anda.

(a) $x^2 - 5$ (b) $2x^2 + x^{-2}$ (c) $3y^2 - 3x + 1$

(d) $-\frac{1}{2}m^2$ (e) $x^3 - x$ (f) $x^{\frac{1}{2}} + 2x - 1$

(g) $\frac{1}{x^2} + 4x - 1$ (h) $p^2 - \frac{1}{2}p + 3$ (i) $n(n-2)$

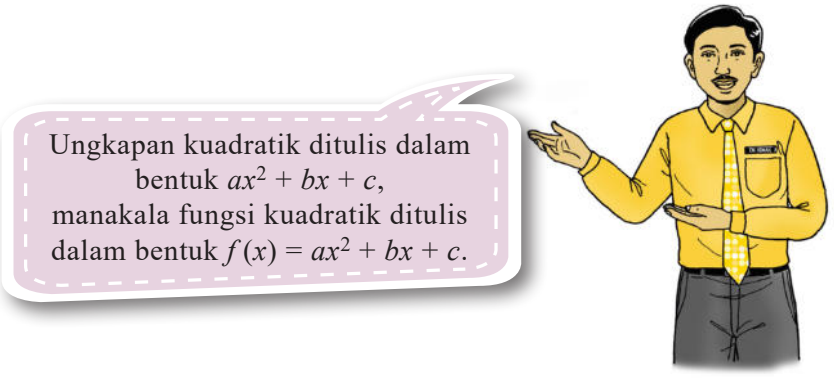
2. Tentukan nilai a, b dan c bagi setiap ungkapan kuadratik yang berikut.

(a) $2x^2 - 5x + 1$ (b) $x^2 - 2x$ (c) $2y^2 + 1$

(d) $-\frac{1}{2}p^2 + 4p$ (e) $1 - x - 2x^2$ (f) $4x^2$

(g) $h^2 + \frac{3}{2}h - 4$ (h) $\frac{1}{3}k^2 - 2$ (i) $2r(r-3)$

Apakah kaitan antara fungsi kuadratik dengan hubungan banyak kepada satu?



Standard Pembelajaran

Mengenal fungsi kuadratik sebagai hubungan banyak kepada satu, dan seterusnya memerihalkan ciri-ciri fungsi kuadratik.

MEMORI SAYA

Jenis-jenis hubungan
- Hubungan satu kepada satu
- Hubungan satu kepada banyak
- Hubungan banyak kepada satu
- Hubungan banyak kepada banyak

ZON INTERAKTIF

Bincangkan dan berikan contoh jenis hubungan banyak kepada satu.

Rangsangan Minda 3

Tujuan: Mengenal fungsi kuadratik sebagai hubungan banyak kepada satu.

Alat: Pembaris, pensel.

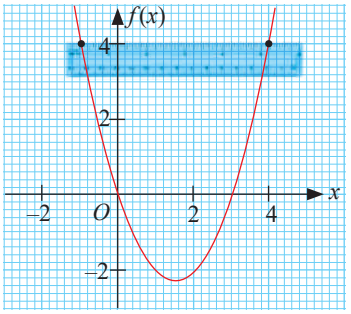
ZON INFORMASI

Bagi fungsi kuadratik, $y = f(x)$.

Langkah:

1. Berdasarkan graf fungsi $f(x)$ di bawah, lukis satu garis yang selari dengan paksi-x pada graf (b) dan (c) seperti contoh (a).
2. Tandakan titik persilangan antara graf fungsi $f(x)$ dengan garis lurus.
3. Nyatakan bilangan titik persilangan dan koordinat titik persilangan.
4. Ulang langkah 1 hingga 3 dengan meletak pembaris pada nilai $f(x)$ yang berbeza. Pastikan garis lurus yang dilukis sentiasa selari dengan paksi-x.

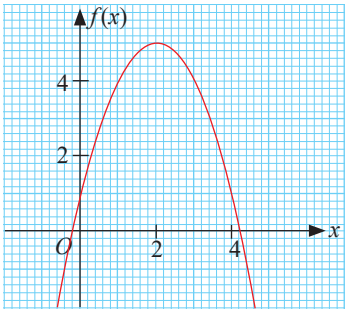
(a) $f(x) = x^2 - 3x$



Bilangan titik persilangan = 2

Koordinat titik persilangan = (4, 4), (–1, 4)

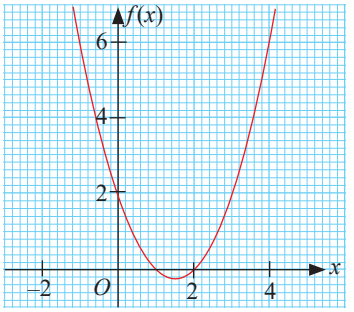
(b) $f(x) = -x^2 + 4x + 1$



Bilangan titik persilangan = ____

Koordinat titik persilangan = (____), (____)

(c) $f(x) = x^2 - 3x + 2$



Bilangan titik persilangan = ____

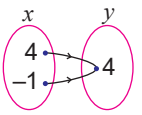
Koordinat titik persilangan = (____), (____)

Perbincangan:

1. Apakah kaitan antara koordinat-x dengan koordinat-y pada kedua-dua titik persilangan setiap fungsi?
2. Apakah jenis hubungan suatu fungsi kuadratik?

MEMORI SAYA

Bagi titik pada satah Cartes, koordinat-x ialah objek dan koordinat-y ialah imej.



Hasil daripada Rangsangan Minda 3, didapati bahawa;

Semua fungsi kuadratik mempunyai imej yang sama daripada dua objek yang berbeza.

Sebagai kesimpulannya,

Jenis hubungan suatu fungsi kuadratik ialah hubungan banyak kepada satu.

Imbas *QR Code* untuk melihat ujian garis mencancang.
http://yakin-pelajar.com/bab1/mencancang.pdf

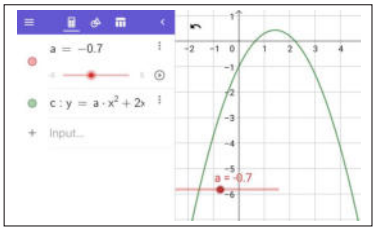
Apakah bentuk graf fungsi kuadratik?

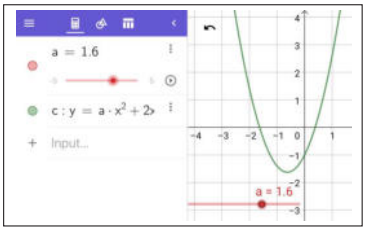
Rangsangan Minda 4

Tujuan: Mengenal pasti dan memerihalkan hubungan antara nilai a dengan bentuk graf suatu fungsi kuadratik.

Langkah:

1. Gerakkan *slider* perlahan-perlahan ke kiri dan ke kanan. Perhatikan bentuk graf.





Imbas *QR Code* untuk menjalankan aktiviti ini.
https://www.geogebra.org/graphinglt5az2zwm

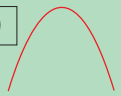
2. Lakarkan sekurang-kurangnya dua graf bagi nilai a positif dan dua graf bagi nilai a negatif.

Perbincangan:
Apakah kaitan antara nilai a dengan bentuk graf?

Hasil daripada Rangsangan Minda 4, didapati bahawa;

Bagi graf $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$
(a) hanya terdapat dua bentuk graf,
(b) nilai a menentukan bentuk graf.

$a > 0$

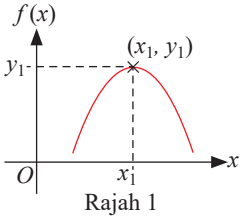
$a < 0$ 

TIP

Bentuk graf melengkung bagi fungsi kuadratik digelar sebagai parabola.

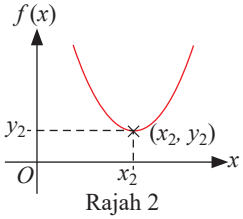
Apakah titik maksimum atau titik minimum bagi suatu fungsi kuadratik?

Setiap lakaran graf fungsi kuadratik akan mempunyai nilai koordinat-y yang tertinggi atau terendah berdasarkan bentuk lakaran.



Rajah 1

Bagi lakaran graf fungsi kuadratik dengan keadaan $a < 0$, y_1 ialah nilai tertinggi bagi koordinat-y dan x_1 ialah nilai yang sepadan bagi y_1. Titik (x_1, y_1) dikenali sebagai **titik maksimum**.



Rajah 2

Bagi lakaran graf fungsi kuadratik dengan keadaan $a > 0$, y_2 ialah nilai terendah bagi koordinat-y dan x_2 ialah nilai yang sepadan bagi y_2. Titik (x_2, y_2) dikenali sebagai **titik minimum**.

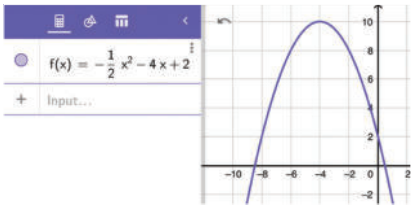
Rangsangan Minda 5

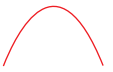
Tujuan: Meneroka titik maksimum atau titik minimum bagi suatu fungsi kuadratik.

Langkah:

1. Taip fungsi kuadratik menggunakan perisian geometri dinamik.
2. Lengkapkan jadual di bawah seperti dalam (a).
3. Ulang langkah 1 dan 2 dengan pelbagai fungsi kuadratik.

Imbas *QR Code* untuk menjalankan aktiviti ini.
https://www.geogebra.org/graphing



	Fungsi Kuadratik	Nilai a	Bentuk Graf	Titik maksimum / titik minimum dan koordinat
(a)	$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 4x + 2$	$a = -\frac{1}{2}$		Titik: Maksimum Koordinat = $(-4, 10)$
(b)	$f(x) = x^2 - 4x + 3$			Titik: Koordinat =
(c)	$f(x) = -2x^2 - 4x + 1$			Titik: Koordinat =

Perbincangan:
Apakah kaitan antara nilai a dengan titik maksimum atau titik minimum?

Hasil daripada Rangsangan Minda 5, didapati bahawa;

> Bagi fungsi kuadratik $f(x) = ax^2 + bx + c$,
> titik maksimum diperoleh apabila $a < 0$,
> titik minimum diperoleh apabila $a > 0$.

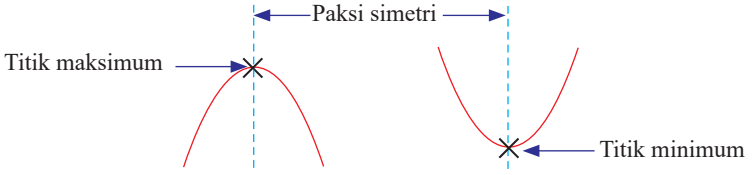
ZON INFORMASI

Titik maksimum dan titik minimum juga dikenali sebagai titik pegun atau titik pusingan.

Apakah paksi simetri suatu graf fungsi kuadratik?

Paksi simetri suatu graf fungsi kuadratik ialah garis lurus yang selari dengan paksi-y dan membahagikan graf tersebut kepada dua bahagian yang sama saiz dan bentuk.

Paksi simetri akan melalui titik maksimum atau titik minimum graf fungsi seperti dalam rajah di bawah.



MEMORI SAYA

Paksi simetri ialah garis lurus yang membahagikan suatu bentuk geometri atau objek kepada dua bahagian yang sama saiz dan bentuk.

Celik Minda

Persamaan paksi simetri graf fungsi kuadratik, $x = -\frac{b}{2a}$.

Rangsangan Minda 6

Tujuan: Melukis dan mengenal pasti paksi simetri graf fungsi kuadratik.

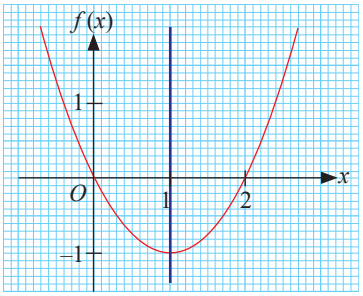
MEMORI SAYA

Persamaan garis lurus yang selari dengan paksi-y ialah $x = h$

Langkah:

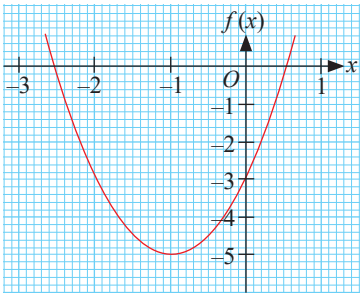
1. Dengan menggunakan pembaris, lukis paksi simetri bagi setiap graf fungsi kuadratik di bawah.
2. Seterusnya tulis persamaan paksi simetri berkenaan seperti dalam (a).

(a) $f(x) = x^2 - 2x$ (b) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ (c) $f(x) = -2x^2 + 4x + 2$

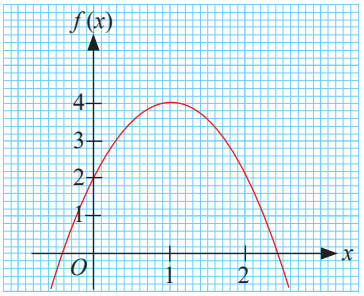


Persamaan paksi simetri

$x = 1$



Persamaan paksi simetri



Persamaan paksi simetri

Perbincangan:

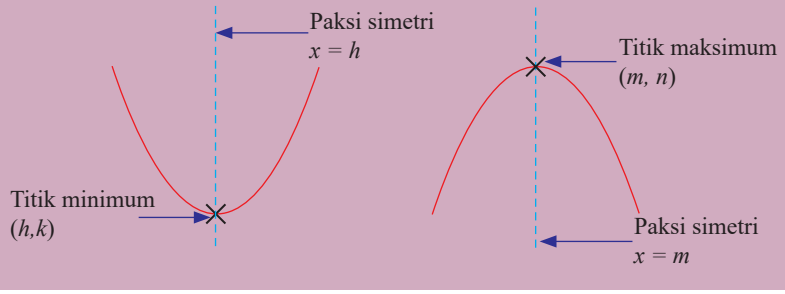
1. Apakah hubungan antara paksi simetri graf fungsi kuadratik dengan paksi-y?
2. Apakah hubungan antara paksi simetri graf fungsi kuadratik dengan kedudukan titik maksimum atau titik minimum?

Hasil daripada Rangsangan Minda 6, didapati bahawa;

Paksi simetri bagi suatu graf fungsi kuadratik adalah selari dengan paksi-y dan melalui titik maksimum atau titik minimum.

Secara generalisasi,

Setiap fungsi kuadratik mempunyai satu paksi simetri dan paksi simetri akan melalui titik maksimum atau titik minimum bagi fungsi kuadratik tersebut.



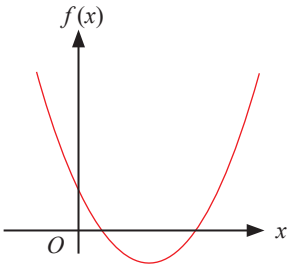
Praktis Kendiri 1.1b

1. Tentukan bentuk graf fungsi kuadratik yang berikut sama ada ∪ atau ∩.

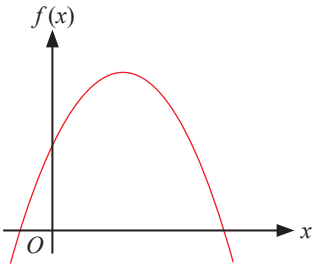
(a) $f(x) = x^2 - 4x + 1$ (b) $g(x) = -x^2 + 2x - 4$

2. Bagi setiap graf fungsi kuadratik $f(x) = ax^2 + bx + c$ di bawah, nyatakan julat bagi nilai a dan nyatakan sama ada graf tersebut mempunyai titik maksimum atau titik minimum.

(a)

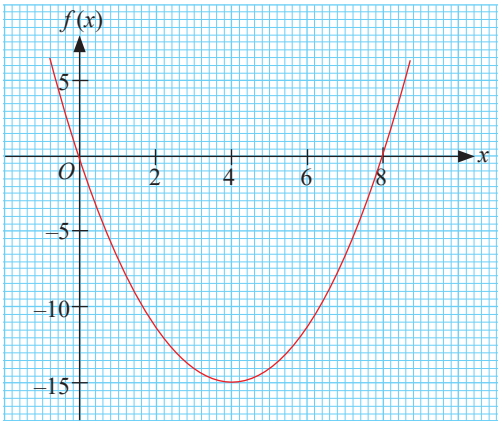


(b)

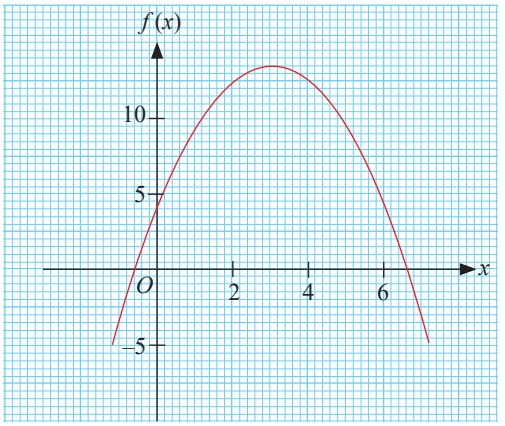


3. Tentukan titik maksimum atau titik minimum dan nyatakan persamaan paksi simetri bagi setiap graf fungsi kuadratik di bawah.

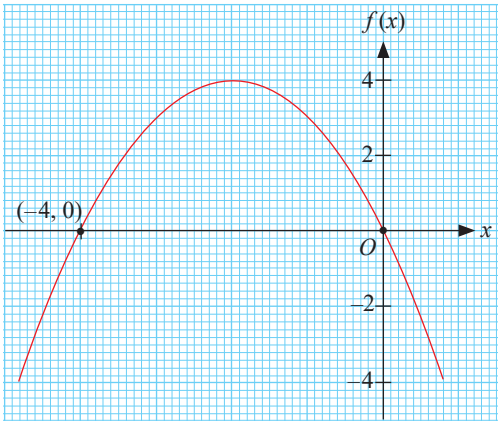
(a)



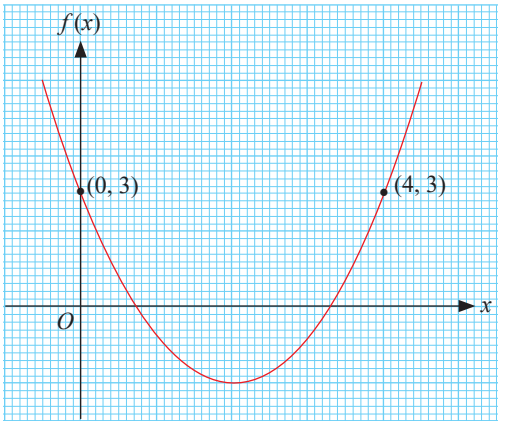
(b)



(c)



(d)



Apakah kesan perubahan nilai *a*, *b* dan *c* terhadap graf fungsi kuadratik $f(x) = ax^2 + bx + c$?

Standard Pembelajaran

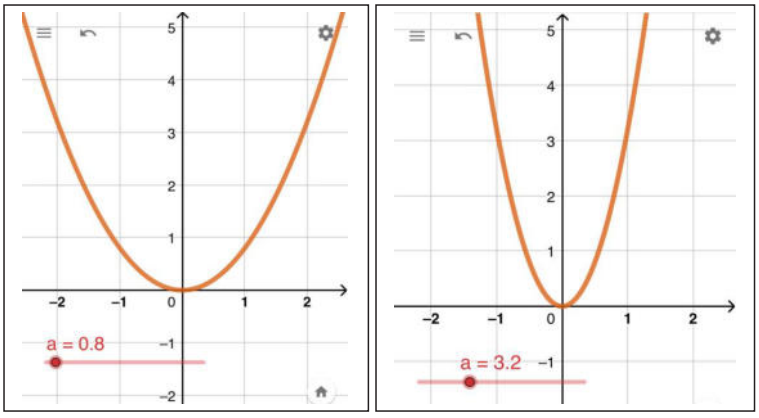
Menyiasat dan membuat generalisasi tentang kesan perubahan nilai *a*, *b* dan *c* terhadap graf fungsi kuadratik, $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Rangsangan Minda 7

Tujuan: Mengenal pasti kesan perubahan nilai *a* terhadap graf fungsi kuadratik $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Langkah:

1. Gerakkan *slider* ke kiri dan ke kanan.



Imbas *QR Code* untuk menjalankan aktiviti ini.
https://www.geogebra.org/graphing/nhxfjgy3

2. Perhatikan bentuk graf apabila nilai *a* berubah.

Perbincangan:

Apakah kesan perubahan nilai *a* terhadap graf fungsi kuadratik?

Hasil daripada Rangsangan Minda 7, didapati bahawa;

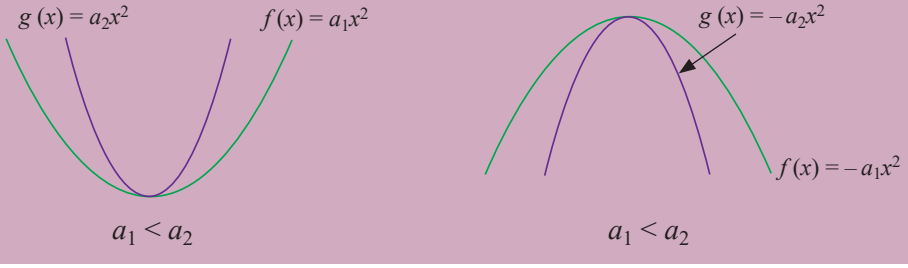
Nilai *a* menentukan bentuk graf.

ZON INTERAKTIF

Bincangkan kesan terhadap lengkok graf fungsi kuadratik apabila $a < 0$.

Secara generalisasi,

Bagi graf fungsi kuadratik $f(x) = ax^2 + bx + c$,
semakin kecil nilai *a*, semakin lebar lengkok graf fungsi kuadratik dan sebaliknya.

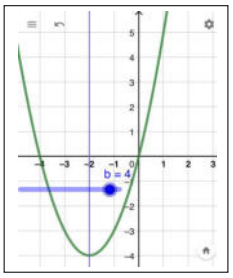


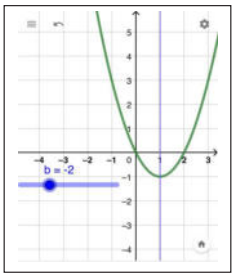
Rangsangan Minda 8

Tujuan: Mengenal pasti kesan perubahan nilai b terhadap graf fungsi kuadratik $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Langkah:

1. Gerakkan *slider* ke kiri dan ke kanan.





Imbas *QR Code* untuk menjalankan aktiviti ini.
https://www.geogebra.org/graphing/vpzgvwba

2. Perhatikan kedudukan paksi simetri apabila nilai b berubah.

Perbincangan:

Apakah kesan perubahan nilai b terhadap graf fungsi kuadratik?

Hasil daripada Rangsangan Minda 8, didapati bahawa;

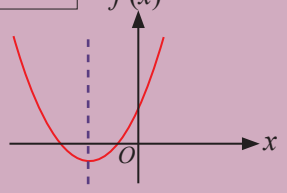
Nilai b menentukan kedudukan paksi simetri.

Secara generalisasi,

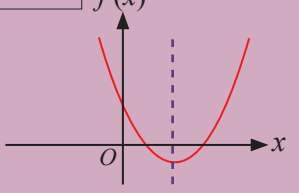
bagi graf fungsi kuadratik $f(x) = ax^2 + bx + c$

jika $a > 0$; $b > 0$, maka paksi simetri berada di sebelah kiri paksi-y.
$b < 0$, maka paksi simetri berada di sebelah kanan paksi-y.
$b = 0$, maka paksi simetri ialah paksi-y.

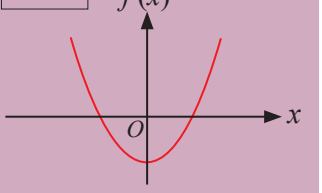
$b > 0$



$b < 0$

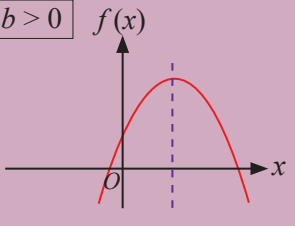


$b = 0$

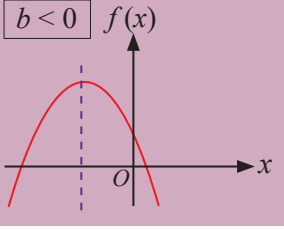


jika $a < 0$; $b > 0$, maka paksi simetri berada di sebelah kanan paksi-y.
$b < 0$, maka paksi simetri berada di sebelah kiri paksi-y.
$b = 0$, maka paksi simetri ialah paksi-y.

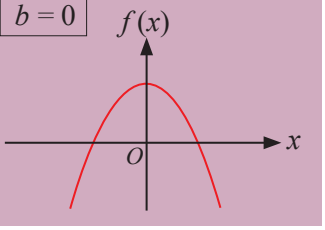
$b > 0$



$b < 0$



$b = 0$

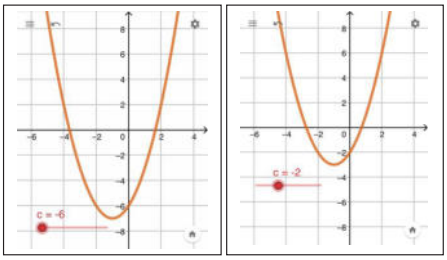


Rangsangan Minda 9

Tujuan: Mengenal pasti kesan perubahan nilai c terhadap graf kuadratik $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Langkah:

1. Gerakkan *slider* ke kiri dan ke kanan.



Imbas *QR Code* untuk menjalankan aktiviti ini.
https://www.geogebra.org/graphing/rv7njx84

MEMORI SAYA

Pintasan-y ialah titik sesuatu graf memotong paksi-y.

2. Perhatikan kedudukan pintasan-y apabila nilai c berubah.

Perbincangan:

Apakah kesan nilai c ke atas graf fungsi kuadratik $f(x) = ax^2 + bx + c$?

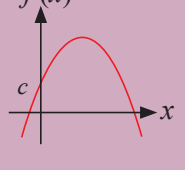
Hasil daripada Rangsangan Minda 9, didapati bahawa;

Nilai c menentukan kedudukan pintasan-y.

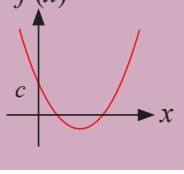
Secara generalisasi,

Bagi graf fungsi kuadratik $f(x) = ax^2 + bx + c$,
nilai c menentukan kedudukan pintasan-y bagi suatu graf fungsi kuadratik.

$a < 0$



$a > 0$



Contoh 2

Fungsi kuadratik $f(x) = x^2 - 3x + c$ melalui titik A seperti di bawah. Hitung nilai c bagi setiap kes yang berikut.

(a) $A(0, 4)$ (b) $A(-1, 3)$

Penyelesaian:

(a) Titik $A(0, 4)$ berada di paksi-y, maka nilai $c = 4$.

(b) $f(x) = x^2 - 3x + c$

Gantikan nilai $x = -1$ dan $f(x) = 3$ ke dalam fungsi kuadratik,

$3 = (-1)^2 - 3(-1) + c$

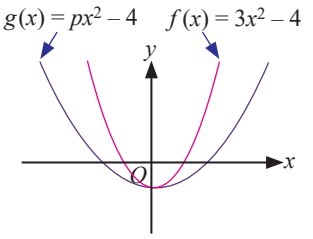
$c = -1$

TIP

c ialah pintasan-y bagi graf fungsi kuadratik $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Contoh 3

Rajah di sebelah menunjukkan dua graf fungsi kuadratik $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ yang dilukis pada paksi yang sama. Nyatakan julat nilai p. Berikan justifikasi anda.



Penyelesaian:

$0 < p < 3$.

Oleh sebab bukaan bagi graf $g(x)$ adalah lebih lebar, maka $p < 3$. Bagi graf bentuk $\cup$, $p > 0$.

Oleh itu, $0 < p < 3$.

Praktis Kendiri 1.1c

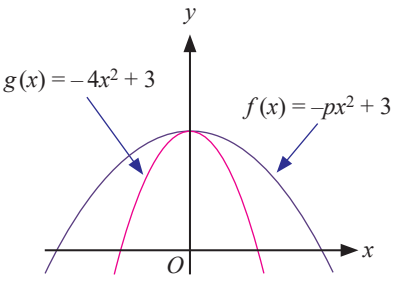
1. Fungsi kuadratik di bawah melalui titik seperti yang dinyatakan. Hitung nilai c bagi setiap kes yang berikut.

(a) $f(x) = x^2 + 7x + c$, melalui titik (0, 5).

(b) $f(x) = 2x^2 – 4x + c$, melalui titik (2, –3).

(c) $f(x) = –2x^2 + x + c$, pintasan-$y = 4$.

2. Rajah di sebelah menunjukkan dua graf fungsi kuadratik $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ yang dilukis pada paksi yang sama. Nyatakan julat nilai p. Berikan justifikasi anda.

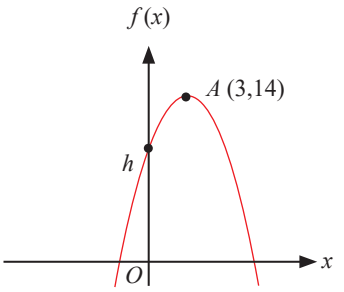


3. Rajah di sebelah menunjukkan graf fungsi kuadratik $f(x) = kx^2 + 6x + h$. Titik A (3,14) ialah titik maksimum graf fungsi kuadratik ini.

(a) Diberi k ialah integer dengan keadaan $–2 < k < 2$. Nyatakan nilai k.

(b) Dengan menggunakan nilai k daripada (a), hitung nilai h.

(c) Nyatakan persamaan fungsi kuadratik yang dibentuk apabila graf dipantulkan pada paksi-x. Berikan jawapan anda dalam bentuk $f(x) = ax^2 + bx + c$.



Bagaimanakah anda dapat membentuk persamaan kuadratik berdasarkan suatu situasi?

Standard Pembelajaran

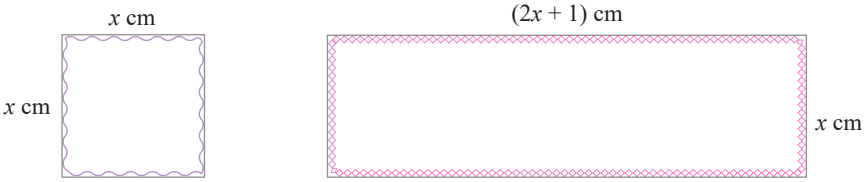
Membentuk fungsi kuadratik berdasarkan suatu situasi dan seterusnya menghubungkaitkannya dengan persamaan kuadratik.

Fungsi kuadratik ditulis dalam bentuk $f(x) = ax^2 + bx + c$ manakala suatu persamaan kuadratik ditulis dalam bentuk am, $ax^2 + bx + c = 0$.

Cuba teka umur saya.
Apabila saya darabkan umur saya dengan umur saya sendiri, kemudian ditolak dengan 21 kali umur saya, hasilnya ialah 72.

Contoh 4

Encik Ganesan merancang untuk membuat dua jenis kad untuk digunakan dalam aktiviti Kelab Matematik. Ukuran bagi kad-kad tersebut adalah seperti yang ditunjukkan dalam rajah di bawah.



(a) Bentuk satu ungkapan kuadratik bagi jumlah luas kedua-dua kad ini, L cm^2, dalam sebutan x.

(b) Diberi jumlah luas kedua-dua kad ialah 114 cm^2, bentuk satu persamaan kuadratik dalam sebutan x.

Penyelesaian:

(a) $L = x^2 + x(2x + 1)$
$= x^2 + 2x^2 + x$
$= 3x^2 + x$

(b) $3x^2 + x = 114$
$3x^2 + x - 114 = 0$

Praktis Kendiri 1.1d

1. Rajah di sebelah menunjukkan sebidang tanah dengan panjang $(x + 20)$ m dan lebar $(x + 5)$ m.

(a) Bentuk satu fungsi bagi luas, L m^2, tanah tersebut.

(b) Jika luas tanah ialah 250 m^2, tulis satu persamaan kuadratik dalam sebutan x. Berikan jawapan anda dalam bentuk $ax^2 + bx + c = 0$.

2. Aiman berumur 4 tahun lebih tua daripada adiknya. Hasil darab umur Aiman dengan umur adiknya adalah sama dengan umur bapanya. Diberi umur bapanya ialah 48 tahun dan umur adik Aiman ialah p tahun. Tulis satu persamaan kuadratik dalam sebutan p.

Apakah yang anda faham tentang maksud punca suatu persamaan kuadratik?

Standard Pembelajaran

Menerangkan maksud punca suatu persamaan kuadratik.

Punca bagi persamaan kuadratik $ax^2 + bx + c = 0$ ialah nilai pemboleh ubah, x, yang memuaskan persamaan tersebut.

Tahukah anda bagaimanakah kita boleh menentukan punca suatu persamaan kuadratik?

ZON INTERAKTIF

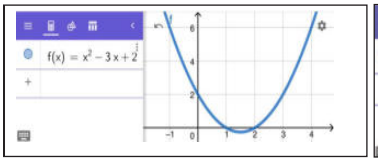
Apakah yang dimaksudkan dengan "memuaskan sesuatu persamaan"? Bincangkan.

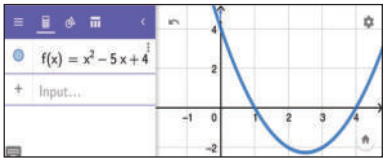
Rangsangan Minda 10

Tujuan: Menentukan nilai pemboleh ubah yang memuaskan suatu persamaan kuadratik.

Langkah:

1. Bahagikan kelas kepada dua kumpulan, A dan B.
2. Kumpulan A akan melengkapkan jadual di bawah dengan pengiraan tanpa perisian geometri dinamik.
3. Kumpulan B akan menjalankan aktiviti dengan menggunakan perisian geometri dinamik. Masukkan setiap fungsi kuadratik dalam perisian. Bagi setiap graf, tentukan nilai ungkapan kuadratik bagi setiap nilai x yang diberikan.





Imbas *QR Code* untuk menjalankan aktiviti ini.
https://www.geogebra.org/graphing

4. Lengkapkan jadual di bawah. Seterusnya, kenal pasti nilai-nilai x yang memuaskan persamaan kuadratik yang diberikan.

$x^2 - 3x + 2 = 0$	
Nilai x	Nilai $x^2 - 3x + 2$
0	$0^2 - 3(0) + 2 = 2$
1	0
2	0
3	2
4	6
Nilai x ialah 1, 2	

$x^2 - 5x + 4 = 0$	
Nilai x	Nilai $x^2 - 5x + 4$
0	
1	
2	
3	
4	
Nilai x ialah	

$x^2 - 2x + 1 = 0$	
Nilai x	Nilai $x^2 - 2x + 1$
–2	
–1	
0	
1	
2	
Nilai x ialah	

$x^2 + x - 2 = 0$	
Nilai x	Nilai $x^2 + x - 2$
–2	
–1	
0	
1	
2	
Nilai x ialah	

$x^2 - 4x + 5 = 2$	
Nilai x	Nilai $x^2 - 4x + 5$
0	
1	
2	
3	
4	
Nilai x ialah	

$x^2 + 2x - 2 = 1$	
Nilai x	Nilai $x^2 + 2x - 2$
–3	
–2	
–1	
0	
1	
Nilai x ialah	

Perbincangan:
Bagaimanakah anda dapat menentukan nilai pemboleh ubah yang memuaskan suatu persamaan kuadratik?

Hasil daripada Rangsangan Minda 10, didapati bahawa;

(a) Terdapat satu atau dua nilai pemboleh ubah yang memuaskan suatu persamaan kuadratik.

(b) Nilai-nilai pemboleh ubah yang memuaskan suatu persamaan kuadratik dikenali sebagai punca bagi persamaan kuadratik tersebut.

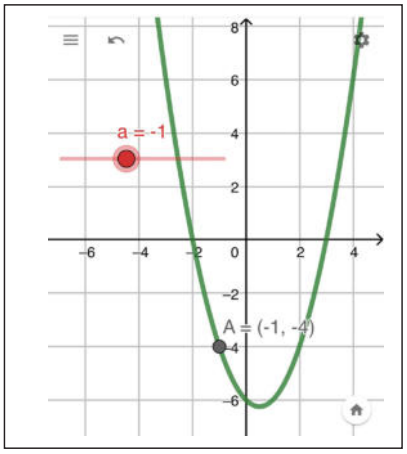
Apakah kaitan antara punca suatu persamaan kuadratik dengan kedudukan punca-punca berkenaan?

Rangsangan Minda 11

Tujuan: Meneroka kedudukan punca suatu persamaan kuadratik pada graf fungsi kuadratik.

Langkah:

1. Gerakkan *slider* untuk melihat perubahan koordinat-x dan koordinat-y pada graf.
2. Punca persamaan kuadratik $x^2 - x - 6 = 0$ boleh ditentukan apabila $y = 0$. Gerakkan *slider* ke kiri dan ke kanan. Perhatikan koordinat A.



Imbas *QR Code* untuk menjalankan aktiviti ini.
https://www.geogebra.org/graphing/bykrknjx

3. Tentukan kedudukan titik A apabila y ialah 0.
4. Tandakan titik berkenaan pada rajah di atas.

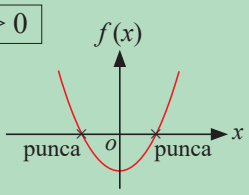
Perbincangan:

Apakah yang anda perhatikan tentang kedudukan punca suatu persamaan kuadratik pada graf fungsi kuadratik?

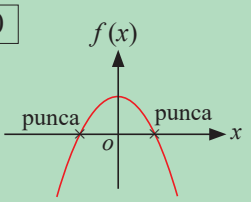
Hasil daripada Rangsangan Minda 11, didapati bahawa;

Punca bagi suatu persamaan kuadratik $ax^2 + bx + c = 0$ merupakan titik persilangan antara graf fungsi kuadratik $f(x) = ax^2 + bx + c$ berkenaan dengan paksi-x dan juga dikenali sebagai pintasan-x.

$a > 0$



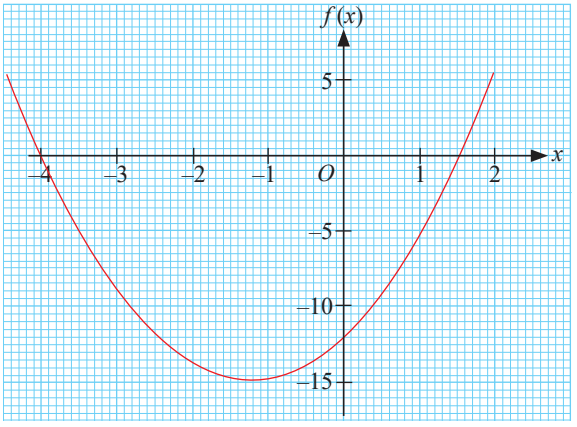
$a < 0$



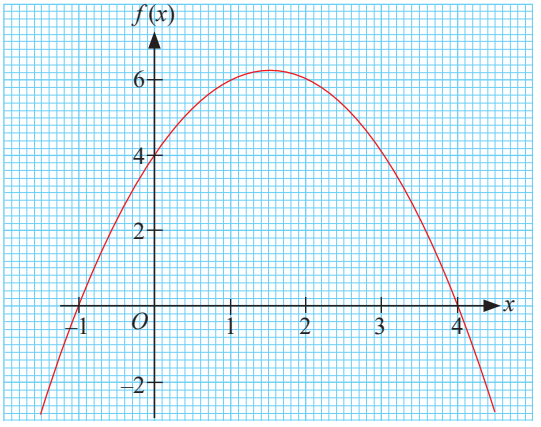
Contoh 5

Bagi setiap graf fungsi kuadratik di bawah, tandakan dan nyatakan punca bagi persamaan kuadratik yang diberikan.

(a) $2x^2 + 5x - 12 = 0$

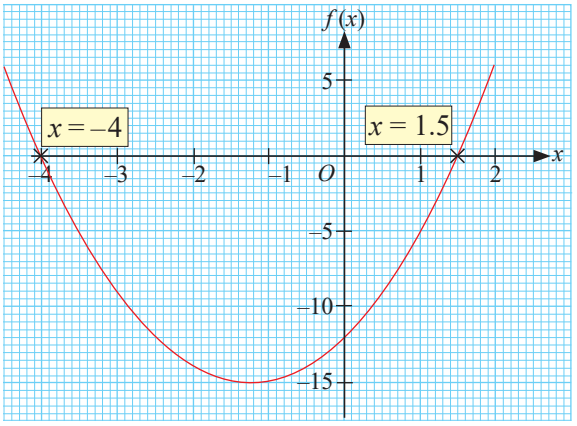


(b) $-x^2 + 3x + 4 = 0$



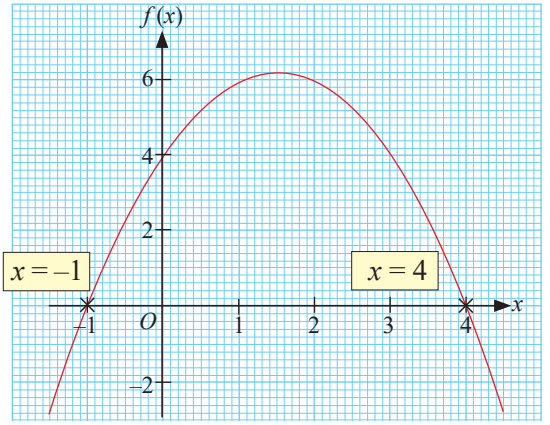
Penyelesaian:

(a) $2x^2 + 5x - 12 = 0$



Punca ialah –4 dan 1.5

(b) $-x^2 + 3x + 4 = 0$



Punca ialah –1 dan 4

Contoh 6

Tentukan sama ada setiap nilai berikut merupakan punca bagi persamaan kuadratik yang diberikan atau bukan.

(a) $2x^2 - 7x + 3 = 0$; $x = 1$, $x = 3$

(b) $3x^2 - 7x + 5 = 3$; $x = 1$, $x = \frac{1}{3}$

Penyelesaian:

(a) $2x^2 - 7x + 3 = 0$

Apabila $x = 1$,

Kiri: Kanan:

$2x^2 - 7x + 3 = 2(1)^2 - 7(1) + 3$ 0

$= 2 - 7 + 3$

$= -2$ ← tidak sama

Maka, $x = 1$ bukan punca bagi persamaan $2x^2 - 7x + 3 = 0$.

Apabila $x = 3$,

Kiri: Kanan:

$2x^2 - 7x + 3 = 2(3)^2 - 7(3) + 3$ 0

$= 18 - 21 + 3$

$= 0$ ← sama

Maka, $x = 3$ ialah punca bagi persamaan $2x^2 - 7x + 3 = 0$.

(b) $3x^2 - 7x + 5 = 3$

Apabila $x = 1$,

Kiri: Kanan:

$3x^2 - 7x + 5 = 3(1)^2 - 7(1) + 5$ 3

$= 3 - 7 + 5$

$= 1$ ← tidak sama

Maka, $x = 1$ bukan punca bagi persamaan $3x^2 - 7x + 5 = 3$.

Apabila $x = \frac{1}{3}$,

Kiri: Kanan:

$3x^2 - 7x + 5 = 3(\frac{1}{3})^2 - 7(\frac{1}{3}) + 5$ 3

$= \frac{1}{3} - \frac{7}{3} + 5$

$= 3$ ← sama

Maka, $x = \frac{1}{3}$ ialah punca bagi persamaan $3x^2 - 7x + 5 = 3$.

MEMORI SAYA

Punca suatu persamaan kuadratik ialah nilai x yang memuaskan persamaan tersebut.

Semak Jawapan

1. Tekan 2, Alpha, X, x^2, −, 7, Alpha, X, +, 3
2. Tekan CALC

   Paparan: x? 0.
3. Tekan 1 =

   Paparan: $2x^2 - 7x + 3$ −2.
4. Tekan CALC

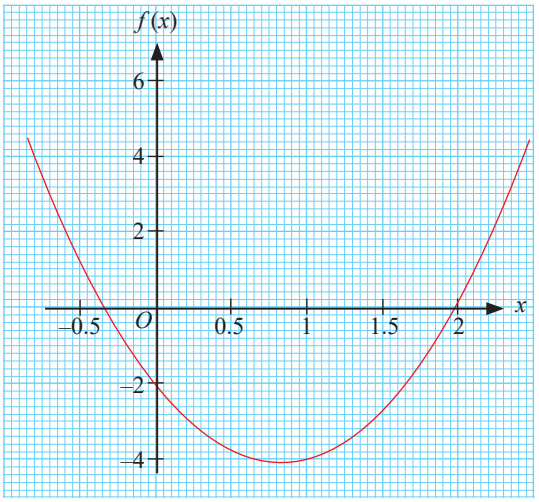
   Paparan: x? 1.
5. Tekan 3 =

   Paparan: $2x^2 - 7x + 3$ 0.

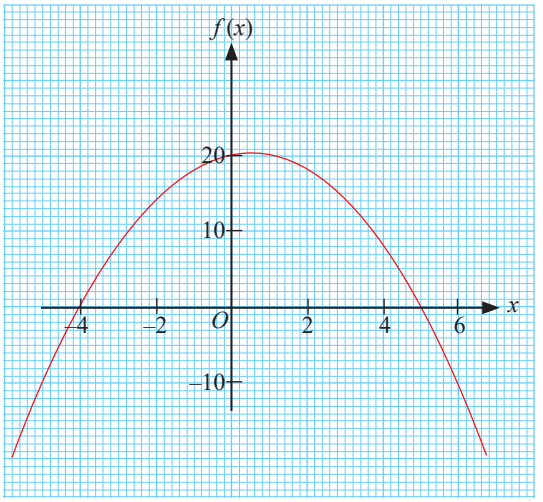
Praktis Kendiri 1.1e

1. Bagi setiap graf fungsi kuadratik di bawah, nyatakan punca-punca bagi persamaan kuadratik yang diberikan.

(a) $3x^2 - 5x - 2 = 0$



(b) $-x^2 + x + 20 = 0$



2. Bagi setiap yang berikut, tentukan sama ada setiap nilai berikut merupakan punca bagi persamaan kuadratik yang diberikan atau bukan.

(a) $x^2 - 5x + 6 = 0; x = 3, x = 2$

(b) $2x^2 - x - 1 = 0; x = 1, x = \frac{1}{2}$

(c) $3x^2 - 5x - 2 = 0; x = -\frac{1}{3}, x = -2$

(d) $3x^2 + 4x + 2 = 6; x = 2, x = \frac{2}{3}$

3. Bagi setiap yang berikut, tentukan sama ada setiap nilai berikut merupakan punca bagi persamaan kuadratik yang diberikan.

(a) $(x - 1)(x + 4) = 0; x = -4, x = 2, x = 1$

(b) $2(x - 3)(x - 5) = 0; x = -3, x = 3, x = 5$

(c) $3(2 + x)(x - 4) = 0; x = -2, x = 2, x = 4$

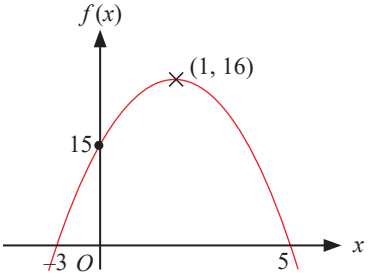
4. Bagi graf fungsi kuadratik di sebelah, tentukan sama ada nilai x yang diberikan merupakan punca bagi persamaan kuadratik $f(x) = 0$.

(a) $x = 1$

(b) $x = -3$

(c) $x = 15$

(d) $x = 5$



Bagaimanakah anda menentukan punca suatu persamaan kuadratik dengan kaedah pemfaktoran?

Kaedah pemfaktoran ialah salah satu cara untuk menentukan punca bagi sesuatu persamaan.

Setiap persamaan kuadratik perlu ditulis dalam bentuk $ax^2 + bx + c = 0$ sebelum melakukan pemfaktoran.

Contoh 7

Tentukan punca persamaan kuadratik berikut dengan kaedah pemfaktoran.

(a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

(b) $x^2 + \frac{7}{2}x = 2$

(c) $\frac{x}{2} = \frac{5x - 24}{x - 4}$

(d) $(y + 2)(y + 1) = 2(y + 11)$

Penyelesaian:

(a) $x^2 - 5x + 6 = 0$
$(x - 3)(x - 2) = 0$
$x = 3$ atau $x = 2$

(b) $x^2 + \frac{7}{2}x = 2$
$2x^2 + 7x = 4$
$2x^2 + 7x - 4 = 0$
$(2x - 1)(x + 4) = 0$
$x = \frac{1}{2}$ atau $x = -4$

(c) $\frac{x}{2} = \frac{5x - 24}{x - 4}$
$x(x - 4) = 2(5x - 24)$
$x^2 - 4x = 10x - 48$
$x^2 - 14x + 48 = 0$
$(x - 8)(x - 6) = 0$
$x = 8$ atau $x = 6$

(d) $(y + 2)(y + 1) = 2(y + 11)$
$y^2 + 3y + 2 = 2y + 22$
$y^2 + y - 20 = 0$
$(y + 5)(y - 4) = 0$
$y = -5$ atau $y = 4$

Standard Pembelajaran

Menentukan punca suatu persamaan kuadratik dengan kaedah pemfaktoran.

MEMORI SAYA

$2x^2 + 5x - 3$
$= (2x - 1)(x + 3)$

ZON INFORMASI

Persamaan kuadratik juga boleh diselesaikan dengan menggunakan
- Kaedah penyempurnaan kuasa dua.
- Kaedah rumus
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Semak Jawapan

Langkah-langkah untuk menyelesaikan $x^2 - 5x + 6 = 0$.

1. Tekan kekunci [mode] 3 kali sehingga mendapat paparan seperti berikut.
[EQN] [MAT] [VCT]
[1] [2] [3]
2. Tekan [1] untuk memilih [EQN], iaitu persamaan.
3. Pada paparan [unknowns?] [2] [3] tekan ▷
4. Pada paparan [Degree?] [2] [3] tekan [2], iaitu kuasa dua.
5. Pada paparan *a*? Masukkan nilai 1, kemudian tekan [=]
6. Pada paparan *b*? Masukkan nilai –5, kemudian tekan [=]
7. Pada paparan *c*? Masukkan nilai 6, kemudian tekan [=]
8. $x_1 = 3$ akan dipaparkan, tekan [=]
9. $x_2 = 2$ akan dipaparkan.

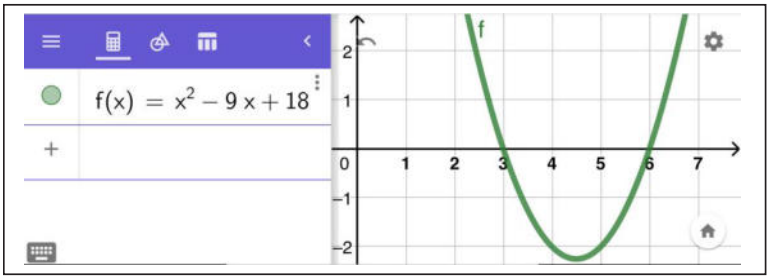
Bagaimanakah anda menentukan punca persamaan kuadratik dengan kaedah graf?

Rangsangan Minda 12

Tujuan: Menentukan punca suatu persamaan kuadratik pada graf fungsi kuadratik dengan menggunakan perisian geometri dinamik.

Langkah:

1. Masuk persamaan kuadratik satu demi satu dalam perisian geometri dinamik.



Imbas *QR Code* untuk menjalankan aktiviti ini.
https://www.geogebra.org/graphing

2. Tentukan punca persamaan kuadratik dan lengkapkan jadual berikut.

Lembaran Aktiviti:

	Persamaan Kuadratik	Punca
(a)	$x^2 - 9x + 18 = 0$	$x = 3, x = 6$
(b)	$4x^2 + 4x - 3 = 0$	
(c)	$-x^2 + 9x - 20 = 0$	
(d)	$-4x^2 - 11x + 3 = 0$	

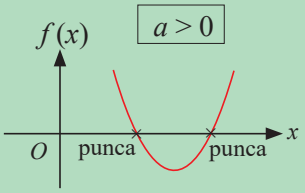
TIP

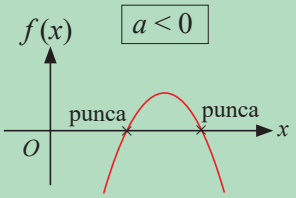
Punca suatu persamaan kuadratik $ax^2 + bx + c = 0$ ialah nilai x yang memuaskan persamaan kuadratik.

Perbincangan:
Bagaimanakah anda dapat menentukan punca bagi suatu persamaan kuadratik melalui kaedah graf?

Hasil daripada Rangsangan Minda 12, didapati bahawa;

Punca bagi suatu persamaan kuadratik $ax^2 + bx + c = 0$ dapat diperoleh dengan kaedah graf dengan membaca nilai-nilai x yang merupakan titik persilangan antara graf fungsi kuadratik $f(x) = ax^2 + bx + c$ dengan paksi-x.





Praktis Kendiri 1.1f

1. Tentukan punca bagi setiap persamaan kuadratik yang berikut dengan kaedah pemfaktoran.

(a) $x^2 - 3x - 10 = 0$ (b) $x^2 - 10x + 16 = 0$ (c) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

(d) $2x^2 + 8x - 24 = 0$ (e) $2x^2 + 3x - 9 = 0$ (f) $4x^2 - 3x - 10 = 0$

(g) $-3x^2 - x + 14 = 0$ (h) $x^2 - 5x = 0$ (i) $x^2 - 4 = 0$

2. Tulis setiap persamaan kuadratik yang berikut dalam bentuk am. Seterusnya selesaikan persamaan kuadratik tersebut.

(a) $m(m + 2) = 3$ (b) $3p(11 - 2p) = 15$ (c) $\frac{1}{2}y^2 = 12 - y$

(d) $a + \frac{5}{a} = 6$ (e) $\frac{8}{k} = 2 + k$ (f) $2h + \frac{6}{h} = 7$

(g) $(h - 2)(h - 1) = 12$ (h) $(2x - 1)^2 = 3x - 2$ (i) $(r + 1)(r + 9) = 16r$

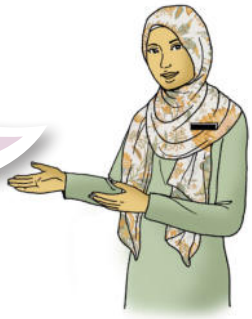
Bagaimanakah anda melakar graf fungsi kuadratik?

Standard Pembelajaran

Melakar graf fungsi kuadratik.

Ciri-ciri graf yang perlu ditunjukkan semasa melakar graf fungsi kuadratik adalah seperti yang berikut.

1. Bentuk graf yang betul.
2. Pintasan-y.
3. Pintasan-x atau satu titik yang dilalui oleh graf tersebut.



Kes 1

Graf fungsi kuadratik bersilang pada paksi-x.

MEMORI SAYA

$f(x) = x^2 - 4x + 3$
$a = 1, b = -4, c = 3$

Contoh 8

Lakar setiap graf fungsi kuadratik yang berikut.

(a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

(b) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

(c) $f(x) = -x^2 + 2x + 15$

(d) $f(x) = -2x^2 + 18$

MEMORI SAYA

Pemalar c bagi suatu fungsi kuadratik merupakan pintasan-y graf fungsi kuadratik tersebut.

Penyelesaian:

(a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

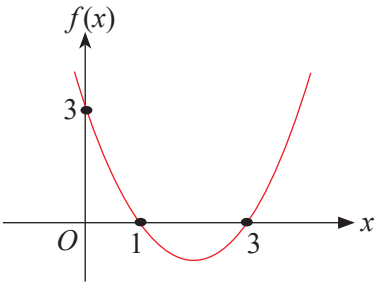
Nilai $a = 1 > 0$, bentuk ∪

Nilai $c = 3$, pintasan-$y = 3$

Apabila $f(x) = 0$, $x^2 - 4x + 3 = 0$

$(x - 3)(x - 1) = 0$

$x = 1$ atau $x = 3$



(b) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

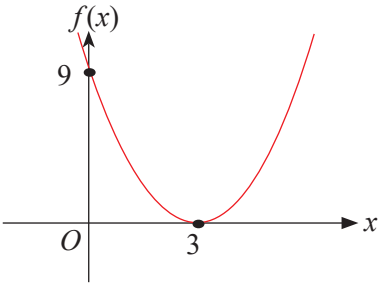
Nilai $a = 1 > 0$, bentuk ∪

Nilai $c = 9$, pintasan-$y = 9$

Apabila $f(x) = 0$, $x^2 - 6x + 9 = 0$

$(x - 3)(x - 3) = 0$

$x = 3$



(c) $f(x) = -x^2 + 2x + 15$

Nilai $a = -1 < 0$, bentuk ∩

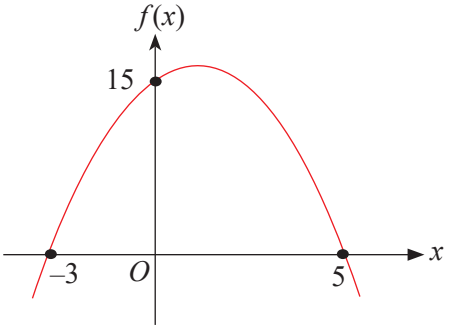
Nilai $c = 15$, pintasan-$y = 15$

Apabila $f(x) = 0$, $-x^2 + 2x + 15 = 0$

$x^2 - 2x - 15 = 0$

$(x - 5)(x + 3) = 0$

$x = -3$ atau $x = 5$



(d) $f(x) = -2x^2 + 18$

Nilai $a = -2 < 0$, bentuk ∩

Nilai $b = 0$, paksi simetri ialah paksi-y

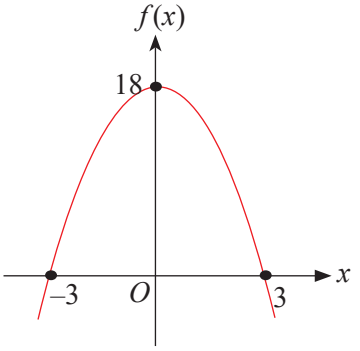
Nilai $c = 18$, pintasan-$y = 18$

Apabila $f(x) = 0$, $-2x^2 + 18 = 0$

$x^2 - 9 = 0$

$(x + 3)(x - 3) = 0$

$x = -3$, $x = 3$



Kes 2

Graf fungsi kuadratik tidak bersilang dengan paksi-x.

Contoh 9

Lakar setiap graf fungsi kuadratik yang berikut.

(a) $f(x) = x^2 + 1$

(b) $f(x) = -x^2 - 3$

Penyelesaian:

(a) $f(x) = x^2 + 1$

Nilai $a = 1 > 0$, bentuk $\cup$

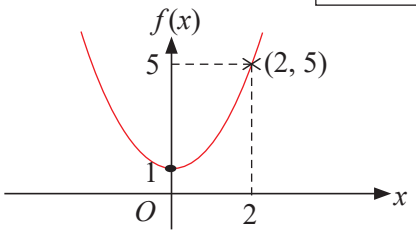
Nilai $b = 0$, paksi simetri ialah paksi-y

Nilai $c = 1$, pintasan-y ialah 1

maka titik minimum ialah (0, 1)

Apabila $x = 2, f(2) = 2^2 + 1$

$= 5$



(b) $f(x) = -x^2 - 3$

Nilai $a = -1 < 0$, bentuk $\cap$

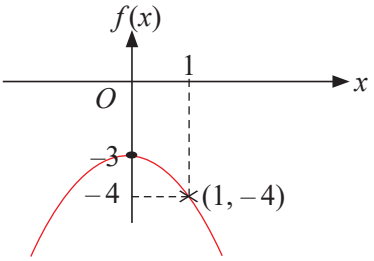
Nilai $b = 0$, paksi simetri ialah paksi-y

Nilai $c = -3$, pintasan-y ialah -3

maka titik maksimum ialah $(0, -3)$

Apabila $x = 1, f(1) = -(1)^2 - 3$

$= -4$



MEMORI SAYA

(a) $f(x) = x^2 + 1$
$a = 1, b = 0, c = 1$

(b) $f(x) = -x^2 - 3$
$a = -1, b = 0, c = -3$

MEMORI SAYA

Jika nilai pekali, $b = 0$ bagi suatu fungsi kuadratik, maka paksi-y ialah paksi simetri graf fungsi kuadratik tersebut.

Praktis Kendiri 1.1g

1. Lakar setiap graf fungsi kuadratik yang berikut.

(a) $f(x) = 2x^2 + 2x - 24$
(b) $f(x) = x^2 - 8x + 16$
(c) $f(x) = -2x^2 + 2x + 40$
(d) $f(x) = -2x^2 + 8$

2. Lakar setiap graf fungsi kuadratik yang berikut.

(a) $f(x) = x^2 + 5$
(b) $f(x) = 2x^2 + 1$
(c) $f(x) = -x^2 + 2$

Bagaimanakah anda menyelesaikan masalah yang melibatkan persamaan kuadratik?

Standard Pembelajaran
Menyelesaikan masalah yang melibatkan persamaan kuadratik.

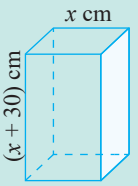
Contoh 10

Joseph ingin membuat rangka sebuah kotak berbentuk kuboid dengan menggunakan rod kayu. Harga rod kayu ialah RM5 per meter. Tapak kuboid tersebut berbentuk segi empat sama. Tinggi kuboid ialah 30 cm lebih daripada panjang tapak. Jumlah luas permukaan kotak ini ialah 4 800 cm^2. Bajet Joseph untuk membina rangka sebuah kotak ialah RM15. Tentukan sama ada Joseph mempunyai bajet yang mencukupi atau tidak.

Penyelesaian:

Memahami masalah

Panjang tapak = x cm
Tinggi kuboid = $(x + 30)$ cm
Jumlah luas permukaan = 4 800 cm^2
Bajet = RM15 sebuah kotak



Merancang strategi

- Tentukan ungkapan luas permukaan kuboid.
- Bentuk persamaan kuadratik.
- Selesaikan persamaan kuadratik berkenaan.
- Tentukan ukuran kotak dan bajet.

Melaksanakan strategi

$$\begin{aligned}\text{Jumlah luas permukaan} &= 2(x)(x) + 4(x)(x + 30)\\ &= 2x^2 + 4x^2 + 120x\\ &= 6x^2 + 120x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}6x^2 + 120x &= 4\,800\\ 6x^2 + 120x - 4\,800 &= 0\\ x^2 + 20x - 800 &= 0\\ (x + 40)(x - 20) &= 0\\ x = -40 \text{ atau } x &= 20\end{aligned}$$

$x = -40$ tidak diterima, maka $x = 20$ cm

Ukuran kotak ialah 20 cm × 20 cm × 50 cm

$$\begin{aligned}\text{Panjang sisi kotak} &= 8 \times 20 \text{ cm} + 4 \times 50 \text{ cm}\\ &= 160 \text{ cm} + 200 \text{ cm}\\ &= 360 \text{ cm}\\ &= 3.6 \text{ m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Bajet} &= \text{RM5} \times 3.6\\ &= \text{RM18}\end{aligned}$$

ZON INFORMASI
Ukuran panjang tidak boleh bernilai negatif.

Semak Jawapan
Apabila $x = 20$
$$\begin{aligned}\text{Luas} &= 6(20)^2 + 120(20)\\ &= 2\,400 + 2\,400\\ &= 4\,800\end{aligned}$$

Kesimpulan

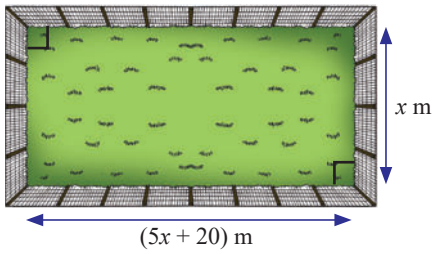
Joseph tidak mempunyai bajet yang mencukupi untuk membina rangka kotak ini.

Praktis Kendiri 1.1h

1. Sebuah padang yang berbentuk segi empat tepat perlu dipagar dengan dawai pagar. Panjang padang ini ialah $(5x + 20)$ m dan lebarnya ialah x m.

(a) Ungkapkan luas padang ini, L m^2, dalam sebutan x.

(b) Diberi luas padang ialah 5 100 m^2, hitung kos memagar padang ini jika kos dawai pagar tersebut ialah RM20 per meter.



2. Encik Kamarul memandu keretanya dengan laju purata $(20t - 20)$ km j^{-1} selama $(t - 3)$ jam di lebuh raya. Jarak yang dilalui oleh Encik Kamarul ialah 225 km. Had laju bagi lebuh raya berkenaan ialah 110 km j^{-1}. Adakah Encik Kamarul mematuhi peraturan had laju lebuh raya?

Praktis Komprehensif

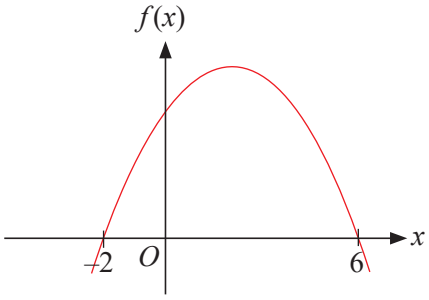
1. Tentukan sama ada setiap ungkapan berikut merupakan ungkapan kuadratik dalam satu pemboleh ubah atau bukan.

(a) $p^2 - 4p + 1$ (b) $\frac{1}{2}y^2 - 4y + 9$ (c) $\frac{1}{3} - 2b + a^2$

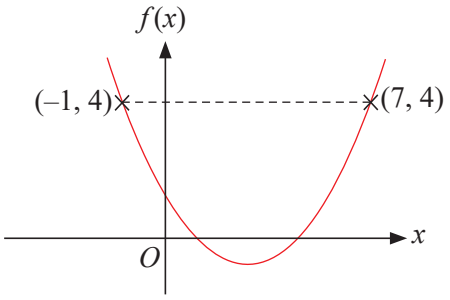
(d) $-m + 1$ (e) $b^2 + 2$ (f) $\frac{a^2 + 2a + 1}{3}$

2. Nyatakan persamaan paksi simetri bagi setiap graf fungsi kuadratik di bawah.

(a)



(b)



3. Selesaikan setiap persamaan kuadratik berikut.

(a) $4x^2 - 1 = 0$ (b) $x^2 - 81 = 0$ (c) $y^2 - 4y = 0$

(d) $x^2 + 3x + 2 = 0$ (e) $2x^2 - x - 10 = 0$ (f) $(x - 2)^2 = 16$

(g) $m^2 + 3m - 4 = 0$ (h) $2p^2 - 13p + 20 = 0$ (i) $(k - 4)(k - 1) = 18$

(j) $\frac{h - 1}{3} = \frac{1}{h + 1}$ (k) $2(x - 2)^2 = 5x - 7$

4. Diberi salah satu punca bagi persamaan kuadratik $x^2 + px - 18 = 0$ ialah 2. Hitung nilai p.

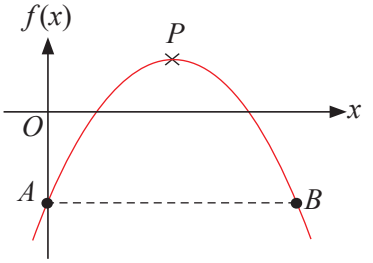
5. Tunjukkan bahawa persamaan kuadratik $(m - 6)^2 = 12 - 2m$ boleh ditulis sebagai $m^2 - 10m + 24 = 0$. Seterusnya selesaikan persamaan $(m - 6)^2 = 12 - 2m$.

6. Tentukan koordinat titik minimum bagi fungsi kuadratik $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

7. Diberi $x = 4$ ialah paksi simetri bagi fungsi kuadratik $f(x) = 7 + 8x - x^2$. Tentukan koordinat titik maksimum bagi fungsi kuadratik ini.

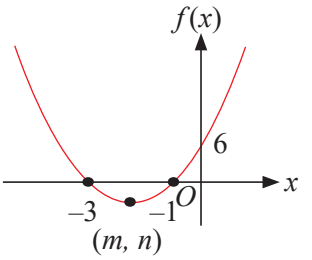
8. Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada graf fungsi kuadratik $f(x) = -x^2 + 6x - 5$. Garis lurus AB adalah selari dengan paksi-x. Tentukan

(a) koordinat titik A,
(b) persamaan paksi simetri,
(c) koordinat titik B,
(d) koordinat titik maksimum P.



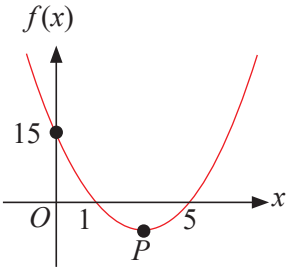
9. Rajah di sebelah menunjukkan graf bagi fungsi kuadratik $f(x) = ax^2 + 8x + c$. Hitung nilai bagi setiap yang berikut.

(a) c,
(b) m,
(c) a,
(d) n.



10. Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada graf bagi fungsi kuadratik $f(x) = a(x - h)(x - k)$ dengan keadaan $h < k$. Titik P ialah titik minimum bagi graf fungsi kuadratik tersebut.

(a) Hitung nilai
(i) h, (ii) k, (iii) a.
(b) Tentukan persamaan paksi simetri.
(c) Nyatakan koordinat titik P.

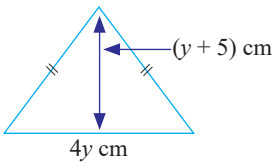


11. Panjang bagi suatu segi empat tepat ialah $(x + 1)$ cm dan lebarnya ialah 5 cm kurang daripada panjangnya.

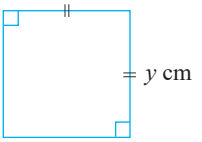
(a) Ungkapkan luas segi empat, L cm^2, dalam sebutan x.
(b) Diberi luas segi empat tepat ialah 24 cm^2, hitungkan panjang dan lebar segi empat tersebut.

12. Rajah 1 menunjukkan sebuah segi tiga sama kaki dengan panjang tapak $4y$ cm dan tinggi $(y + 5)$ cm. Rajah 2 menunjukkan sebuah segi empat sama dengan panjang sisi y cm.

Diberi luas segi tiga melebihi luas segi empat sama sebanyak 39 cm^2. Hitung beza perimeter bagi kedua-dua rajah itu.

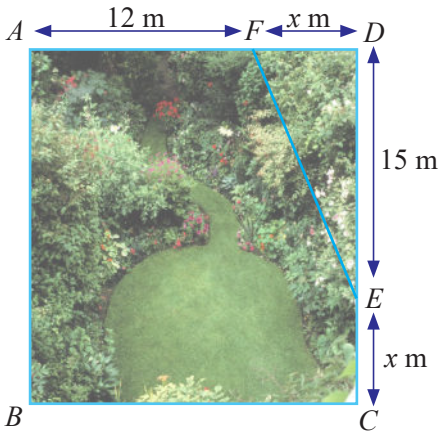


Rajah 1



Rajah 2

13. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah taman bunga yang berbentuk segi empat tepat $ABCD$. Diberi E dan F ialah dua titik pada CD dan AD masing-masing dengan $CE = DF = x$ m. Panjang $AF = 12$ m dan $DE = 15$ m.



(a) Bentuk satu ungkapan bagi luas segi empat tepat ini, L m^2, dalam sebutan x.

(b) Diberi luas segi empat tepat ialah 460 m^2. Hitung nilai x.

(c) Aiman ingin membina satu laluan kecil yang lurus dari titik E ke titik F dengan jubin yang berharga RM50 per meter. Aiman mempunyai bajet sebanyak RM1 000, tentukan sama ada Aiman mempunyai bajet yang mencukupi untuk membina laluan tersebut.

14. Persatuan Sejarah SMK Seri Jaya telah melukis dua buah mural yang berbentuk segi empat tepat bersempena dengan Hari Kemerdekaan Malaysia.

(a) Ungkapkan beza luas antara kedua-dua buah mural, L m^2, dalam sebutan x.

(b) Diberi beza luas antara dua buah mural tersebut ialah 10 m^2, hitung nilai x.

(c) Hitung perimeter bagi mural yang lebih kecil.

$(3x + 1)$ m

$(x - 3)$ m

$(2x - 1)$ m

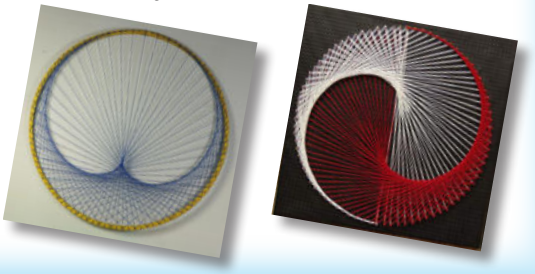
$(x - 1)$ m

PROJEK

Gunakan kreativiti anda untuk membina bentuk-bentuk yang berbeza berdasarkan contoh yang telah disediakan seperti di bawah. Paparkan hasil kerja anda di Sudut Matematik.

Bahan:

1. Kertas graf/kertas putih.
2. Jangka sudut, jangka lukis.
3. Pen berwarna.



PETA KONSEP

Fungsi dan Persamaan Kuadratik dalam Satu Pemboleh Ubah

Ungkapan Kuadratik

(a) Kuasa tertinggi ialah 2
(b) Melibatkan satu pemboleh ubah

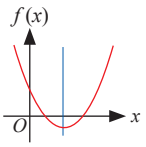
Bentuk am $ax^2 + bx + c$
a, b dan c ialah pemalar, $a \neq 0$

Fungsi Kuadratik

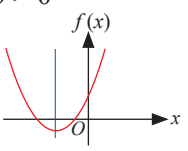
Bentuk am $f(x) = ax^2 + bx + c$

Bentuk graf, $a > 0$

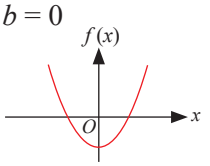
paksi simetri
$b < 0$



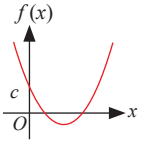
paksi simetri
$b > 0$



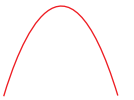
paksi simetri
$b = 0$



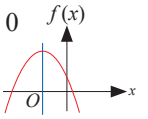
pintasan-y



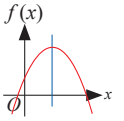
Bentuk graf, $a < 0$



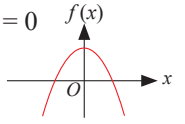
paksi simetri
$b < 0$



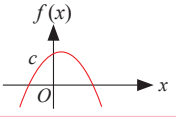
paksi simetri
$b > 0$



paksi simetri
$b = 0$



pintasan-y



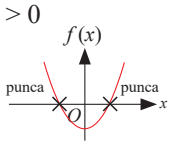
Persamaan Kuadratik

Bentuk am $ax^2 + bx + c = 0$

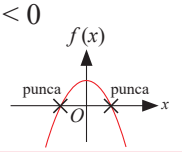
Punca bagi suatu persamaan kuadratik ialah nilai pemboleh ubah yang memuaskan persamaan tersebut

Punca bagi suatu persamaan kuadratik boleh ditentukan melalui
(a) pemfaktoran
(b) kaedah graf

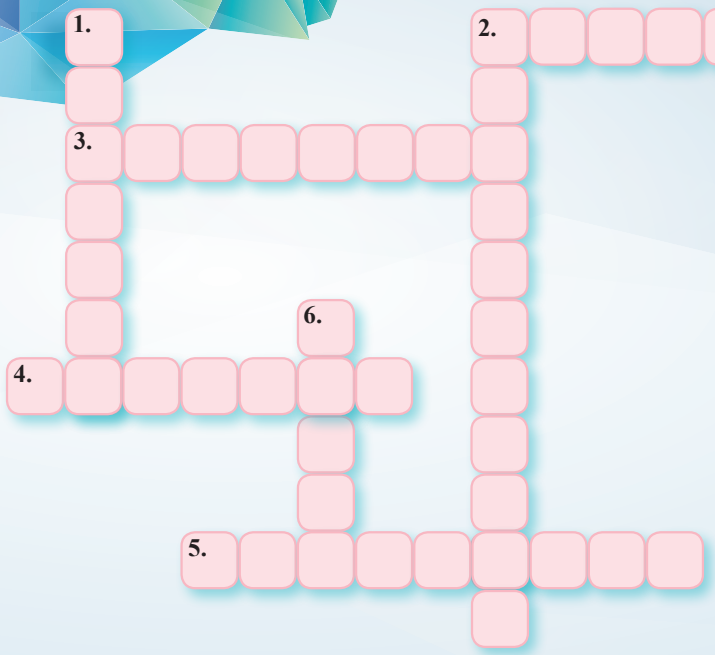
$a > 0$



$a < 0$



Refleksi Kendiri



Melintang

2. Bentuk graf fungsi kuadratik.

3. Titik tertinggi bagi suatu graf fungsi kuadratik.

4. Titik terendah bagi suatu graf fungsi kuadratik.

5. Fungsi yang mempunyai kuasa tertingginya ialah dua.

Menegak

1. Paksi mencancang yang melalui titik maksimum atau titik minimum suatu graf fungsi kuadratik.

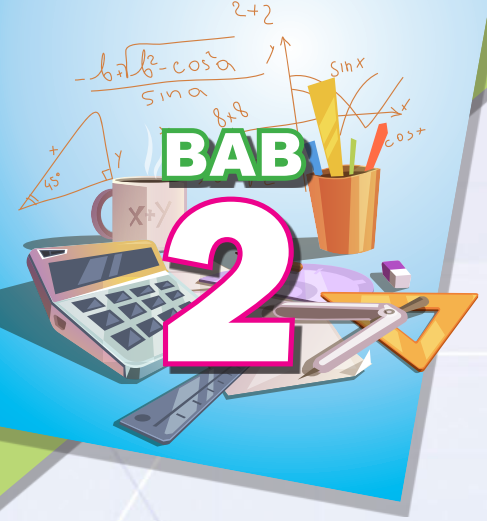
2. Kaedah untuk menentukan punca suatu persamaan kuadratik.

6. Nilai pemboleh ubah yang memuaskan suatu persamaan kuadratik.

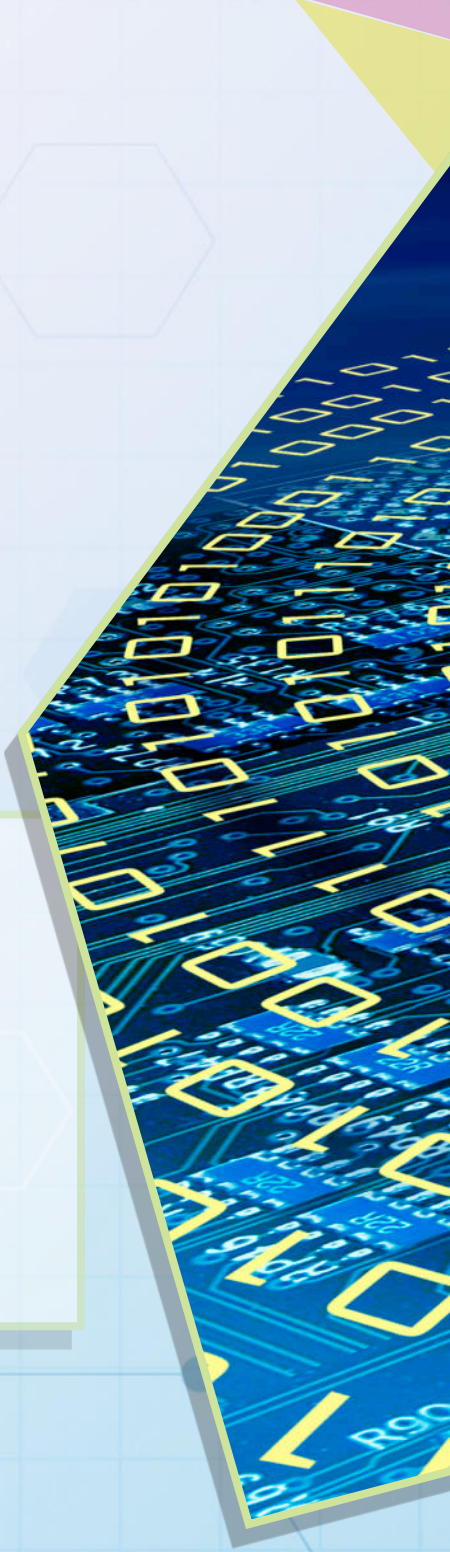
Eksplorasi Matematik

Bentuk graf fungsi kuadratik ialah salah satu bentuk graf yang paling biasa dijumpai dalam kehidupan seharian kita. Perhatikan gambar-gambar yang berikut.

Gunakan kreativiti anda untuk melukis satu binaan berbentuk kuadratik.



Asas Nombor



Anda akan mempelajari

- Asas Nombor

Malaysia menjadi tumpuan utama bagi pelbagai perkembangan teknologi yang mampu mengubah gaya hidup rakyat pada abad ke-21. Perkembangan dalam teknologi membolehkan rakyat Malaysia menikmati kadar muat turun yang pantas, teknologi hologram dalam bidang pendidikan, perubatan, perindustrian, pembuatan kereta swapandu dan sebagainya. Masyarakat yang berkemahiran dalam teknologi maklumat dan telekomunikasi perlu mahir dengan asas nombor yang menjadi tunjang kepada segala teknologi.

Tahukah anda kaitan antara asas nombor dengan teknologi?

Maslahat Bab

Asas nombor ialah kunci untuk segala pengiraan dalam kehidupan harian. Antara bidang yang boleh diceburi ialah Sains Komputer dan bidang-bidang lain yang menggunakan teknologi maklumat sebagai asas penyelidikan dan pembangunan (*Research and Development*) seperti bioteknologi, teknologi reka bentuk, reka bentuk aeroangkasa, farmasi dan sebagainya.

JARINGAN KATA

• asas nombor	• *number base*
• binari	• *binary*
• indeks	• *index*
• nilai tempat	• *place value*
• nilai digit	• *digit value*
• sistem nombor	• *number system*

Imbasan Silam

Brahmagupta
(598 M-668 M)

Brahmagupta seorang ahli astronomi yang berasal dari negeri Rajasthan di barat laut India. Beliau telah memperkenalkan digit 0 kepada sistem nombor yang menjadi asas kepada segala asas nombor yang digunakan pada masa dahulu dan kini.

http://yakin-pelajar.com/Brahma/2.pdf

2.1 Asas Nombor

Bagaimanakah anda mewakilkan dan menjelaskan nombor dalam pelbagai asas dari segi angka, nilai tempat, nilai digit dan nilai nombor berdasarkan proses pengumpulan?

Standard Pembelajaran

Mewakilkan dan menjelaskan nombor dalam pelbagai asas dari segi angka, nilai tempat, nilai digit dan nilai nombor berdasarkan proses pengumpulan.

Asas nombor ialah sistem nombor yang merangkumi digit 0 hingga 9. Sistem nombor terdiri daripada pelbagai asas nombor. Asas sepuluh atau *decimal* merupakan asas yang digunakan secara meluas dalam kehidupan seharian.

Jadual menunjukkan digit yang digunakan dalam asas dua hingga asas sepuluh.

Asas nombor	Digit
Asas 2	0, 1
Asas 3	0, 1, 2
Asas 4	0, 1, 2, 3
Asas 5	0, 1, 2, 3, 4
Asas 6	0, 1, 2, 3, 4, 5
Asas 7	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
Asas 8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
Asas 9	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
Asas 10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

ZON INFORMASI

Digit bermaksud simbol yang digunakan atau digabungkan untuk membentuk nombor dalam sistem penomboran. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ialah sepuluh digit dalam sistem nombor. Contohnya 2145 mempunyai 4 digit.

Contoh 1

Berikan dua contoh nombor yang mewakili nombor asas dua hingga nombor asas sepuluh.

Penyelesaian:

Asas nombor	Nombor	
2	10_2	1001_2
3	21_3	1201_3
4	23_4	213_4
5	41_5	342_5
6	35_6	4510_6
7	64_7	463_7
8	17_8	472_8
9	78_9	385_9
10	69_{10}	2893_{10}

TIP

Setiap asas mempunyai digit 0 hingga digit yang kurang daripada asasnya. Contohnya, asas dua hanya mempunyai digit 0 dan 1.

ZON INFORMASI

nombor 32_5 asas

dibaca sebagai

"Tiga dua asas lima"

Apakah nilai tempat yang terlibat dalam nombor asas dua hingga nombor asas sepuluh?

Setiap asas mempunyai nilai tempat mengikut asas masing-masing. Nilai tempat suatu asas ialah pendaraban berulang asas tersebut. Katakan a ialah asas, maka nilai tempat asas tersebut bermula dengan $a^0, a^1, a^2, \ldots a^n$ seperti yang ditunjukkan dalam jadual di bawah.

MEMORI SAYA

a - asas
n - kuasa
$a^4 = a \times a \times a \times a$

a^n

Asas nombor	a^n	Nilai tempat							
		a^7	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2	a^1	a^0
Asas 2	2^n	128	64	32	16	8	4	2	1
Asas 3	3^n	2187	729	243	81	27	9	3	1
Asas 4	4^n	16384	4096	1024	256	64	16	4	1
Asas 5	5^n	78125	15625	3125	625	125	25	5	1
Asas 6	6^n	279936	46656	7776	1296	216	36	6	1
Asas 7	7^n	823543	117649	16807	2401	343	49	7	1
Asas 8	8^n	2097152	262144	32768	4096	512	64	8	1
Asas 9	9^n	4782969	531441	59049	6561	729	81	9	1
Asas 10	10^n	10000000	1000000	100000	10000	1000	100	10	1

Contoh 2

Nyatakan nilai tempat bagi setiap digit dalam nombor di bawah.

(a) 6231_8 (b) 111101_2

Penyelesaian:

(a)

Nombor asas 8	6	2	3	1
Nilai tempat	8^3	8^2	8^1	8^0

(b)

Nombor asas 2	1	1	1	1	0	1
Nilai tempat	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

Imbasan Silam

Konrad Zuse (1910-1995) merupakan pencipta dan perintis komputer moden dari Jerman. Beliau pengasas kepada komputer yang boleh diprogramkan. Zuse telah merancang bahasa pengaturcaraan di peringkat tinggi yang dikenali sebagai *Plankalkuel.*

Bagaimanakah anda menyatakan nilai digit bagi suatu nombor dalam pelbagai asas?

Nilai digit dalam suatu nombor ialah pendaraban digit dengan nilai tempat yang mewakili digit tersebut.

Kaedah pendaraban digit dengan nilai tempat

1010_2

Nombor	1	0	1	0
Nilai tempat	2^3	2^2	2^1	2^0

$\underline{1} \times 2^1 = 2$

$\underline{2}012_3$

Nombor	2	0	1	2
Nilai tempat	3^3	3^2	3^1	3^0

$\underline{2} \times 3^3 = 54$

$\underline{4}432_5$

Nombor	4	4	3	2
Nilai tempat	5^3	5^2	5^1	5^0

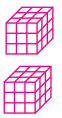
$\underline{4} \times 5^3 = 500$

Kaedah penggunaan blok sebagai nilai digit

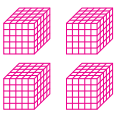
1010_2

Nombor	1	0	1	0
Nilai tempat	2^3	2^2	2^1	2^0
Nilai digit			2	

$\underline{2}012_3$

Nombor	2	0	1	2
Nilai tempat	3^3	3^2	3^1	3^0
Nilai digit	 54			

$\underline{4}432_5$

Nombor	4	4	3	2
Nilai tempat	5^3	5^2	5^1	5^0
Nilai digit	 500			

Kaedah pendaraban digit dengan nilai tempat

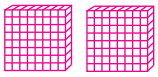
$\underline{2}71_8$

Nombor	$\underline{2}$	7	1
Nilai tempat	8^2	8^1	8^0

$\underline{2} \times 8^2 = 128$

Kaedah penggunaan blok sebagai nilai digit

$\underline{2}71_8$

Nombor	$\underline{2}$	7	1
Nilai tempat	8^2	8^1	8^0
Nilai digit	 128		

Contoh 3

Nyatakan nilai digit yang bergaris bagi setiap nombor berikut.

(a) $\underline{5}037_9$ (b) $3\underline{5}01_6$

Penyelesaian:

(a) $\underline{5}037_9$

Nombor	$\underline{5}$	0	3	7
Nilai tempat	9^3	9^2	9^1	9^0

$\underline{5} \times 9^3 = 3645$

(b) $3\underline{5}01_6$

Nombor	3	$\underline{5}$	0	1
Nilai tempat	6^3	6^2	6^1	6^0

$\underline{5} \times 6^2 = 180$

Bagaimanakah anda menyatakan nilai nombor bagi suatu nombor dalam pelbagai asas?

Nilai nombor dalam pelbagai asas boleh ditentukan dengan menghitung hasil tambah nilai digit nombor tersebut.

Indikator

Asas dua hanya mempunyai digit 0 dan 1 dalam nombornya.

(a) Menentukan nilai nombor bagi nombor dalam asas dua.

Proses Pengumpulan

Nombor	1	1	0	0	1
Nilai tempat	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Nilai nombor	$(1 \times 2^4) + (1 \times 2^3) + (0 \times 2^2) + (0 \times 2^1) + (1 \times 2^0)$ $= 16 + 8 + 0 + 0 + 1$ $= 25_{10}$				

Penambahan nilai digit menggunakan blok

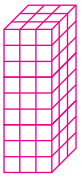
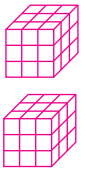
Nombor	1	1	0	0	1
Nilai tempat	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Nilai digit					
Nilai nombor	$16 + 8 + 0 + 0 + 1 = 25_{10}$				

(b) Menentukan nilai nombor bagi nombor dalam asas tiga.

Proses pengumpulan

Nombor	1	2	0	2	1
Nilai tempat	3^4	3^3	3^2	3^1	3^0
Nilai nombor	$(1 \times 3^4) + (2 \times 3^3) + (0 \times 3^2) + (2 \times 3^1) + (1 \times 3^0)$ $= 81 + 54 + 0 + 6 + 1$ $= 142_{10}$				

Penambahan nilai digit menggunakan blok

Nombor	1	2	0	2	1
Nilai tempat	3^4	3^3	3^2	3^1	3^0
Nilai digit					
Nilai nombor	$81 + 54 + 0 + 6 + 1 = 142_{10}$				

(c) Menentukan nilai nombor bagi nombor dalam asas empat.

Proses pengumpulan

Nombor	3	0	2	1
Nilai tempat	4^3	4^2	4^1	4^0
Nilai nombor	$(3 \times 4^3) + (0 \times 4^2) + (2 \times 4^1) + (1 \times 4^0)$ $= 192 + 0 + 8 + 1$ $= 201_{10}$			

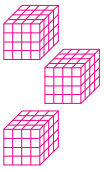
ZON INTERAKTIF

Adakah nilai 243_8 sama dengan 243_5? Bincangkan.

ZON INFORMASI

Penulisan tanda asas untuk nombor asas 10 bersifat pilihan, iaitu boleh ditulis dan sebaliknya.

Penambahan nilai digit menggunakan blok

Nombor	3	0	2	1
Nilai tempat	4^3	4^2	4^1	4^0
Nilai digit				
Nilai nombor	$192 + 0 + 8 + 1 = 201_{10}$			

Celik Minda

Nyatakan dua nombor berlainan asas yang mempunyai nilai yang sama.

Contoh 4

Tentukan nilai nombor bagi yang berikut.

(a) 340_5 (b) 341_7 (c) 1506_8

Celik Minda

Tukar tahun lahir anda kepada asas nombor yang anda pilih.

Penyelesaian:

(a) 340_5

Nombor	3	4	0
Nilai tempat	5^2	5^1	5^0
Nilai nombor	$(3 \times 5^2) + (4 \times 5^1) + (0 \times 5^0)$ $= 75 + 20 + 0$ $= 95_{10}$		

ZON INTERAKTIF

Apakah akan berlaku jika nombor lebih daripada asas sepuluh digunakan? Bincangkan.

(b) 341_7

Nombor	3	4	1
Nilai tempat	7^2	7^1	7^0
Nilai nombor	$(3 \times 7^2) + (4 \times 7^1) + (1 \times 7^0)$ $= 147 + 28 + 1$ $= 176_{10}$		

(c) 1506_8

Nombor	1	5	0	6
Nilai tempat	8^3	8^2	8^1	8^0
Nilai nombor	$(1 \times 8^3) + (5 \times 8^2) + (0 \times 8^1) + (6 \times 8^0)$ $= 512 + 320 + 0 + 6$ $= 838_{10}$			

Semak Jawapan

1. Tekan kekunci MODE 2 kali sehingga mendapat paparan SD REG BASE 1 2 3.
2. Tekan 3 untuk memilih BASE.
3. Tekan OCT.
4. Tekan 1506 kemudian tekan =.
5. Tekan DEC, jawapan 838 dipaparkan.

Praktis Kendiri 2.1a

1. Tuliskan tiga nombor yang mewakili asas dua hingga asas sembilan.

2. Bulatkan tiga nombor yang bukan mewakili nombor dalam asas enam.

245	332	461	212	371	829	345	123

3.

234	673	336	281

Berdasarkan empat nombor ini, kenal pasti dan senaraikan semua nombor bersesuaian dengan asas berikut.

(a) Asas lima (b) Asas tujuh (c) Asas lapan (d) Asas sembilan

4. Tentukan nilai tempat yang bergaris bagi setiap nombor berikut.

(a) $1\underline{1}10010_2$ (b) $\underline{2}14_5$ (c) $600\underline{1}_7$ (d) $5114\underline{0}_6$ (e) $\underline{1}200_3$

(f) $68\underline{3}_9$ (g) $\underline{2}331_4$ (h) $\underline{7}321_8$ (i) $5\underline{2}41_6$ (j) $3221\underline{5}$

5. Tentukan nilai digit yang bergaris bagi setiap nombor berikut.

(a) $\underline{1}110_2$ (b) $3\underline{2}4_5$ (c) $87\underline{3}_9$ (d) $\underline{2}35_6$ (e) $\underline{2}100_3$

(f) $1\underline{6}623_7$ (g) $\underline{1}101_2$ (h) $1\underline{7}76_8$ (i) $2\underline{3}1_4$ (j) $111\underline{1}01_2$

6. Tentukan nilai nombor berikut dalam asas sepuluh.

(a) 23_6 (b) 425_8 (c) 110101_2 (d) 338_9 (e) 364_7

(f) 33_4 (g) 123_5 (h) 1217_8 (i) 515_6 (j) 1121_3

7. Tentukan nilai p dan nilai q.

(a) $1101_2 = (1 \times 2^p) + (1 \times q) + (1 \times 2^0)$ (b) $375_8 = (3 \times 8^p) + (q \times 8^1) + (5 \times 8^0)$

(c) $1321_4 = (1 \times p^q) + (3 \times 4^2) + (2 \times 4^1) + (1 \times 4^0)$

8. Hitung hasil tambah nilai digit 8 dan nilai digit 3 dalam nombor 1823_9.

9. Susun nombor berikut mengikut urutan menaik.

(a) 110_2, 1101_2, 111_2, 1110_2 (b) 1123_4, 132_4, 231_4, 112_4 (c) 324_5, 124_5, 241_5, 231_5

10. Susun nombor berikut mengikut urutan menurun.

(a) 111101_2, 1213_4, 81_9 (b) 123_4, 73_8, 313_5 (c) 253_6, 161_7, 222_3

11. Hitung beza nilai digit 5 antara nombor 1576_8 dengan 125_7.

Bagaimanakah anda menukar nombor daripada satu asas kepada asas yang lain menggunakan pelbagai kaedah?

Standard Pembelajaran

Menukar nombor daripada satu asas kepada asas yang lain menggunakan pelbagai kaedah.

Suatu nombor boleh ditukar kepada asas lain dengan menggunakan pelbagai kaedah, iaitu kaedah penggunaan nilai tempat dan kaedah pembahagian. Proses ini melibatkan penukaran

(a) nombor dalam asas sepuluh kepada asas lain,
(b) nombor daripada sesuatu asas kepada asas sepuluh dan seterusnya kepada asas lain,
(c) nombor dalam asas dua terus kepada asas lapan,
(d) nombor dalam asas lapan terus kepada asas dua.

Bagaimanakah anda menukar nombor dalam asas sepuluh kepada asas lain?

Nombor asas sepuluh boleh ditukar kepada asas lain dengan membahagikan nombornya menggunakan nilai tempat atau nilai asas yang dikehendaki. Nombor 58_{10} boleh ditukar kepada asas dua dengan

(a) membahagikan 58 dengan menggunakan nilai tempat asas dua.
(b) membahagikan 58 dengan dua.

Contoh 5

Sungai Rajang ialah sungai terpanjang di Malaysia iaitu 563 kilometer.
Tukar 563_{10} kepada,

(a) asas lima (b) asas lapan

Penyelesaian:

(a) Asas lima

Pembahagian dengan menggunakan nilai tempat

Nilai tempat	625	125	25	5	1
Langkah	Nilai 625 lebih besar daripada 563	4 125) 563 − 500 63	2 25) 63 − 50 13	2 5) 13 − 10 3	3 1) 3 − 3 0
Asas 5	0	4	2	2	3
Jawapan	4223_5				

563 dibahagikan dengan nilai tempat 125. Baki dipindahkan ke nilai tempat sebelum untuk pembahagian seterusnya sehingga mendapat baki sifar.

Kaedah Alternatif

Pembahagian dengan menggunakan nilai asas.

		Baki
5	563	
5	112	− 3
5	22	− 2
5	4	− 2
	0	− 4

angka dibaca dari bawah ke atas.

Pembahagian diteruskan sehingga digit sifar.

$563_{10} = 4223_5$

(b) Asas lapan

Pembahagian dengan menggunakan nilai tempat.

Nilai tempat	4096	512	64	8	1
Langkah	Nilai 4096 lebih besar daripada 563	1 512) 563 512 51	Nilai 64 lebih besar daripada 51	6 8) 51 48 3	3 1) 3 3 0
Asas 8	0	1	0	6	3
Jawapan:	1063_8				

563 dibahagikan dengan nilai tempat 512. Baki dipindahkan ke nilai tempat sebelum untuk pembahagian seterusnya sehingga mendapat baki sifar.

Kaedah Alternatif

Pembahagian dengan menggunakan nilai asas.

Baki

8 | 563
8 | 70 – 3
8 | 8 – 6
8 | 1 – 0
0 – 1

angka dibaca dari bawah ke atas.

$563_{10} = 1063_8$

Pembahagian diteruskan sehingga digit sifar.

Bagaimanakah anda menukar nombor dalam suatu asas tertentu kepada asas sepuluh dan seterusnya kepada asas lain?

Sesuatu nombor dalam asas p boleh ditukarkan kepada asas sepuluh dan seterusnya kepada asas q. Dalam proses penukaran nombor dalam asas dua kepada asas sembilan, nombor dalam asas dua akan ditukarkan kepada asas sepuluh dan seterusnya kepada asas sembilan.

Asas *p* ⋯→ **Asas 10** ⋯→ **Asas *q***

Contoh 6

Tukar 253_6 kepada asas sembilan.

Penyelesaian:

Langkah 1

Tukar nombor dalam asas enam kepada asas sepuluh.

Nilai tempat	6^2	6^1	6^0
Nombor asas 6	2	5	3
Nilai nombor dalam asas 10	$(2 \times 6^2) + (5 \times 6^1) + (3 \times 6^0)$ $= 105_{10}$		

Langkah 2

Tukar nombor dalam asas sepuluh kepada asas sembilan

9 | 105
9 | 11 – 6
9 | 1 – 2
0 – 1

$253_6 = 105_{10} = 126_9$

Contoh 7

Tukar 334_5 kepada asas dua.

Penyelesaian:

Langkah 1

Tukar nombor dalam asas lima kepada asas sepuluh.

Nilai tempat	5^2	5^1	5^0
Nombor asas 5	3	3	4
Nilai nombor dalam asas 10	$(3 \times 5^2) + (3 \times 5^1) + (4 \times 5^0)$ $= 94_{10}$		

Langkah 2

Tukar nombor dalam asas sepuluh kepada asas dua.

2	94	
2	47	– 0
2	23	– 1
2	11	– 1
2	5	– 1
2	2	– 1
2	1	– 0
	0	– 1

$334_5 = 94_{10} = 1011110_2$

Bagaimanakah anda menukar nombor dalam asas dua kepada asas lapan?

Nombor dalam asas dua boleh ditukar terus kepada asas lapan. Setiap digit dalam asas lapan adalah setara dengan tiga digit dalam asas dua.

1. Asingkan setiap tiga digit dalam nombor asas dua bermula dari kanan ke kiri.
2. Tentukan hasil tambah nilai digit bagi gabungan tiga digit asas dua.
3. Gabungkan nombor dalam asas lapan.

Contoh 8

Tukar nombor asas dua kepada nombor asas lapan.

(a) 110111_2 (b) 1101101_2

Penyelesaian:

(a) 110111_2

Nombor asas 2	1	1	0	1	1	1
Nilai tempat	2^2	2^1	2^0	2^2	2^1	2^0
Nilai digit	4	2	0	4	2	1
Asas 8	$4 + 2 + 0$ $= 6$			$4 + 2 + 1$ $= 7$		
	67_8					

$110111_2 = 67_8$

ZON INFORMASI

Asas 2	Asas 8
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

Kaedah Alternatif

$\underbrace{110}_{6}\ \underbrace{111}_{7}$

$110111_2 = 67_8$

Merujuk kepada jadual dalam zon informasi anda dapat menukar nombor dalam asas dua kepada asas lapan dengan mudah.

(b) 1101101_2

Nombor asas 2			1	1	0	1	1	0	1
Nilai tempat	2^2	2^1	2^0	2^2	2^1	2^0	2^2	2^1	2^0
Nilai digit	0	0	1	4	0	1	4	0	1
Asas 8	$0 + 0 + 1 = 1$			$4 + 0 + 1 = 5$			$4 + 0 + 1 = 5$		
	155_8								

$1101101_2 = 155_8$

Kaedah Alternatif

$\underbrace{1}_{1}\ \underbrace{101}_{5}\ \underbrace{101}_{5}$

$1101101_2 = 155_8$

Bagaimanakah anda menukar nombor dalam asas lapan kepada asas dua?

Nombor dalam asas lapan boleh ditukarkan terus kepada asas dua. Setiap digit dalam asas lapan digantikan dengan tiga digit yang setara dalam asas dua.

1. Asingkan setiap digit dalam nombor asas lapan.
2. Tukarkan setiap digit tersebut kepada nombor asas dua.
3. Gabungkan kesemua nilai digit dalam asas dua.

Contoh 9

Tukar nombor asas lapan kepada nombor asas dua.

(a) 517_8 (b) 725_8

Penyelesaian:

(a) 517_8

Asas 8	5			1			7		
	$4 + 1$			1			$4 + 2 + 1$		
Nilai tempat	2^2	2^1	2^0	2^2	2^1	2^0	2^2	2^1	2^0
Asas 2	1	0	1	0	0	1	1	1	1
	101001111_2								

$517_8 = 101001111_2$

(b) 725_8

Asas 8	7			2			5		
	$4 + 2 + 1$			2			$4 + 1$		
Nilai tempat	2^2	2^1	2^0	2^2	2^1	2^0	2^2	2^1	2^0
Asas 2	1	1	1	0	1	0	1	0	1
	111010101_2								

$725_8 = 111010101_2$

ZON INFORMASI

Asas 2	Asas 10	Asas 16
0000_2	0	0
0001_2	1	1
0010_2	2	2
0011_2	3	3
0100_2	4	4
0101_2	5	5
0110_2	6	6
0111_2	7	7
1000_2	8	8
1001_2	9	9
1010_2	10	A
1011_2	11	B
1100_2	12	C
1101_2	13	D
1110_2	14	E
1111_2	15	F

Praktis Kendiri 2.1b

1. Tukar 494_{10} kepada nombor dalam asas berikut.

(a) Asas dua (b) Asas empat (c) Asas lima (d) Asas lapan (e) Asas sembilan

2. Tukar setiap nombor berikut kepada nombor dalam asas yang diberikan dalam kurungan.

(a) 43_8 (asas 3) (b) 112_3 (asas 5) (c) 526_7 (asas 2)
(d) 1213_4 (asas 6) (e) 1134_5 (asas 8) (f) 321_9 (asas 4)

3. Tukar nilai digit 5 dalam nombor 154_6 kepada nombor dalam asas 3.

4. Tukar setiap nombor berikut kepada nombor dalam asas lapan.

(a) 111101_2 (b) 1110_2 (c) 11110111_2
(d) 101010_2 (e) 111000_2 (f) 111010101_2

5. Tukar setiap nombor berikut kepada nombor dalam asas dua.

(a) 43_8 (b) 112_8 (c) 57_8
(d) 1217_8 (e) 635_8 (f) 243_8

Bagaimanakah anda membuat pengiraan yang melibatkan operasi tambah dan tolak bagi nombor dalam pelbagai asas?

Standard Pembelajaran

Membuat pengiraan yang melibatkan operasi tambah dan tolak bagi nombor dalam pelbagai asas.

Operasi tambah dan operasi tolak dalam asas nombor boleh dijalankan dengan dua kaedah berikut.

(a) Bentuk lazim iaitu cara menulis nombor secara menegak dalam operasi tambah dan operasi tolak.
(b) Penukaran nombor dalam suatu asas kepada asas sepuluh.

Operasi tambah bagi nombor dalam pelbagai asas

Bentuk Lazim

1. Tambah digit yang diberikan bermula dari kanan ke kiri.
2. Hasil tambah digit dalam asas sepuluh ditukar kepada asas yang diberikan untuk ditulis di ruang jawapan.
3. Proses ini akan berulang sehingga semua digit dalam nombor selesai ditambah.

Penukaran Asas

1. Tukar nombor kepada asas sepuluh dan lakukan operasi tambah.
2. Tukarkan semula jawapan dalam asas sepuluh kepada asas yang dikehendaki.

Contoh 10

Hitung nilai bagi setiap yang berikut.

(a) $110_2 + 111_2$ (b) $673_8 + 175_8$ (c) $1837_9 + 765_9$

Penyelesaian:

Bentuk Lazim

(a) $110_2 + 111_2$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 1\ 1\ 0_2 \\ +\ 1\ 1\ 1_2 \\ \hline 1\ 1\ 0\ 1_2 \end{array}$$

TIP Melakukan operasi tambah seperti biasa dan tukar nilai asas sepuluh kepada asas dua.

$0 + 1 = 1_{10} = 1_2$

$1 + 1 = 2_{10} = 10_2$ ← Tulis 0 di ruang jawapan, 1 dibawa ke nilai tempat seterusnya.

$1 + 1 + 1 = 3_{10} = 11_2$

$110_2 + 111_2 = 1101_2$

(b) $673_8 + 175_8$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 1} \\ 6\ 7\ 3_8 \\ +\ 1\ 7\ 5_8 \\ \hline 1\ 0\ 7\ 0_8 \end{array}$$

TIP Melakukan operasi tambah seperti biasa dan tukar nilai asas sepuluh kepada asas lapan.

Tulis 0 di ruang jawapan, 1 dibawa ke nilai tempat seterusnya.

$3 + 5 = 8_{10} = 10_8$

$1 + 7 + 7 = 15_{10} = 17_8$

$1 + 6 + 1 = 8_{10} = 10_8$ ← Tulis 7 di ruang jawapan, 1 dibawa ke nilai tempat seterusnya.

$673_8 + 175_8 = 1070_8$

(c) $1837_9 + 765_9$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 1\ 1} \\ 1\ 8\ 3\ 7_9 \\ +\ \ 7\ 6\ 5_9 \\ \hline 2\ 7\ 1\ 3_9 \end{array}$$

TIP Melakukan operasi tambah seperti biasa dan tukar nilai asas sepuluh kepada asas sembilan.

Tulis 3 di ruang jawapan, 1 dibawa ke nilai tempat seterusnya.

$7 + 5 = 12_{10} = 13_9$

$1 + 3 + 6 = 10_{10} = 11_9$

$1 + 8 + 7 = 16_{10} = 17_9$ ← Tulis 1 di ruang jawapan, 1 di sebelah kiri di bawa ke nilai tempat seterusnya.

$1 + 1 = 2_{10} = 2_9$ ← Tulis 7 di ruang jawapan, 1 dibawa ke nilai tempat seterusnya.

$1837_9 + 765_9 = 2713_9$

Penukaran Asas

(a) $110_2 + 111_2$

$110_2 \rightarrow 6_{10}$

$111_2 \rightarrow +7_{10}$

13_{10}

2	13	
2	6	– 1
2	3	– 0
2	1	– 1
	0	– 1

$110_2 + 111_2 = 1101_2$

(b) $673_8 + 175_8$

$673_8 \rightarrow 443_{10}$

$175_8 \rightarrow +125_{10}$

568_{10}

8	568	
8	71	– 0
8	8	– 7
8	1	– 0
	0	– 1

$673_8 + 175_8 = 1070_8$

(c) $1837_9 + 765_9$

$1837_9 \rightarrow 1411_{10}$

$765_9 \rightarrow +626_{10}$

2037_{10}

9	2037	
9	226	– 3
9	25	– 1
9	2	– 7
	0	– 2

$1837_9 + 765_9 = 2713_9$

Operasi tolak bagi nombor dalam pelbagai asas.

Bentuk Lazim

1. Tolak digit yang diberikan bermula dari kanan ke kiri.
2. Digit hasil tolak ditulis di ruang jawapan. Hasil tolak sentiasa tidak melebihi asas yang diberikan dan nilainya bersamaan asas sepuluh.
3. Proses ini akan berulang sehingga semua digit dalam nombor selesai ditolak.

Penukaran Asas

1. Tukar nombor kepada asas sepuluh dan lakukan operasi tolak.
2. Tukarkan semula jawapan dalam asas sepuluh kepada asas dalam soalan.

Contoh 11

Hitung nilai bagi setiap yang berikut.

(a) $4005_6 - 325_6$
(b) $6241_7 - 613_7$
(c) $372_8 - 77_8$
(d) $1827_9 - 65_9$

Penyelesaian:

Bentuk Lazim

(a) $4005_6 - 325_6$

$$\begin{array}{r} {}^{3}\cancel{4}\,{}^{5}\cancel{6}\,{}^{6}\,0\,0\,5_6 \\ -\ 3\,2\,5_6 \\ \hline 3\,2\,4\,0_6 \end{array}$$

Pemindahan nombor mengikut asas enam. Gunakan enam untuk membuat operasi tolak. Tolak seperti biasa.

$5 - 5 = 0_6$
$6 - 2 = 4_6$
$5 - 3 = 2_6$

$4005_6 - 325_6 = 3240_6$

Penukaran Asas

$$\begin{array}{rr} 4005_6 \rightarrow & 8\,6\,9_{10} \\ 325_6 \rightarrow & -\ 1\,2\,5_{10} \\ \hline & 7\,4\,4_{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 6 & 744 \\ \hline 6 & 124 - 0 \\ \hline 6 & 20 - 4 \\ \hline 6 & 3 - 2 \\ \hline & 0 - 3 \end{array}$$

$4005_6 - 325_6 = 3240_6$

(b) $6241_7 - 613_7$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 5\ 7\ 3\ 7} \\ 6\not{2}\not{4}1_7 \\ -\ \ 6\ 1\ 3_7 \\ \hline 5\ 3\ 2\ 5_7 \end{array}$$

Pemindahan nombor mengikut asas tujuh. Gunakan tujuh untuk membuat operasi tolak. Tolak seperti biasa.

$7 + 1 - 3 = 5_7$

$3 - 1 = 2_7$

$7 + 2 - 6 = 3_7$

$6241_7 - 613_7 = 5325_7$

$6241_7 \rightarrow 2\ 1\ 8\ 5_{10}$

$613_7 \rightarrow -\ 3\ 0\ 4_{10}$

$1\ 8\ 8\ 1_{10}$

7	1881	
7	268	-5
7	38	-2
7	5	-3
	0	-5

$6241_7 - 613_7 = 5325_7$

(c) $372_8 - 77_8$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\ 6\ 8} \\ 3\not{7}2_8 \\ -\ \ 7\ 7_8 \\ \hline 2\ 7\ 3_8 \end{array}$$

Pemindahan nombor mengikut asas lapan. Gunakan lapan untuk membuat operasi tolak. Tolak seperti biasa.

$8 + 2 - 7 = 3_8$

$8 + 6 - 7 = 7_8$

$372_8 - 77_8 = 273_8$

$372_8 \rightarrow 2\ 5\ 0_{10}$

$77_8 \rightarrow -\ 6\ 3_{10}$

$1\ 8\ 7_{10}$

8	187	
8	23	-3
8	2	-7
	0	-2

$372_8 - 77_8 = 273_8$

(d) $1827_9 - 65_9$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 7\ 9} \\ 1\not{8}2\ 7_9 \\ -\ \ 6\ 5_9 \\ \hline 1\ 7\ 5\ 2_9 \end{array}$$

Pemindahan nombor mengikut asas sembilan. Gunakan sembilan untuk membuat operasi tolak. Tolak seperti biasa.

$7 - 5 = 2_9$

$9 + 2 - 6 = 5_9$

$1827_9 - 65_9 = 1752_9$

$1827_9 \rightarrow 1\ 4\ 0\ 2_{10}$

$65_9 \rightarrow -\ 5\ 9_{10}$

$1\ 3\ 4\ 3_{10}$

9	1343	
9	149	-2
9	16	-5
9	1	-7
	0	-1

$1827_9 - 65_9 = 1752_9$

Praktis Kendiri 2.1c

1. Hitung nilai bagi setiap operasi tambah yang berikut.

(a) $11_2 + 10_2$ (b) $11011_2 + 11110_2$ (c) $210_3 + 121_3$ (d) $1112_3 + 101_3$

(e) $13_4 + 10_4$ (f) $1330_4 + 1120_4$ (g) $423_5 + 130_5$ (h) $3244_5 + 203_5$

(i) $351_6 + 122_6$ (j) $123_6 + 50_6$ (k) $166_7 + 253_7$ (l) $633_7 + 150_7$

(m) $1713_8 + 105_8$ (n) $453_8 + 262_8$ (o) $183_9 + 17_9$ (p) $5703_9 + 750_9$

2. Hitung nilai bagi setiap operasi tolak yang berikut.

(a) $1111_2 - 10_2$ (b) $1011_2 - 101_2$ (c) $2210_3 - 211_3$ (d) $1012_3 - 121_3$

(e) $131_4 - 121_4$ (f) $1030_4 - 122_4$ (g) $423_5 - 100_5$ (h) $3204_5 - 2013_5$

(i) $3531_6 - 114_6$ (j) $1253_6 - 150_6$ (k) $6026_7 - 243_7$ (l) $6503_7 - 160_7$

(m) $1753_8 - 1005_8$ (n) $4403_8 - 202_8$ (o) $1853_9 - 1207_9$ (p) $8703_9 - 7250_9$

Bagaimanakah anda menyelesaikan masalah yang melibatkan asas nombor?

Contoh 12

Cara ke sekolah	Peratus (%)
Bas	25
Kereta	40
Jalan kaki	17
Basikal	10
Motosikal	8

Standard Pembelajaran

Menyelesaikan masalah yang melibatkan asas nombor.

Jadual di atas menunjukkan kajian tentang cara 200 orang murid hadir ke sekolah.

(a) Tentukan bilangan murid yang hadir ke sekolah dengan menaiki bas dan menaiki kereta dalam asas empat.

(b) Hitung jumlah murid yang hadir ke sekolah dengan menaiki bas dan menaiki kereta dalam asas empat.

(c) Hitung beza antara bilangan murid yang hadir ke sekolah dengan berjalan kaki dan menunggang motosikal dalam asas tujuh.

Memahami masalah

Jumlah murid = 200

Peratus yang diberikan perlu ditukar dengan bilangan murid.

Merancang strategi

(a) Tukar bilangan murid yang hadir ke sekolah dengan menaiki bas dan kereta kepada nombor dalam asas empat.
(b) Tambah jawapan dalam (a).
(c) Tolak bilangan murid yang berjalan kaki dengan yang menunggang motosikal. Tukar jawapan kepada nombor asas tujuh.

Melaksanakan strategi

(a) Bas = 302_4

$\frac{25}{100} \times 200 = 50_{10}$

$4 \mid 50$
$4 \mid 12 - 2$
$4 \mid 3 - 0$
$0 - 3$

Kereta = 1100_4

$\frac{40}{100} \times 200 = 80_{10}$

$4 \mid 80$
$4 \mid 20 - 0$
$4 \mid 5 - 0$
$4 \mid 1 - 1$
$0 - 1$

(b)
$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 0_4 \\ +\ \ 3\ 0\ 2_4 \\ \hline 2\ 0\ 0\ 2_4 \end{array}$$

$1100_4 + 302_4 = 2002_4$

(c) $34 - 16 = 18_{10}$

$\frac{17}{100} \times 200 = 34_{10}$

$\frac{8}{100} \times 200 = 16_{10}$

$7 \mid 18$
$7 \mid 2 - 4$
$0 - 2$
$= 24_7$

Kesimpulan

(a) Bas = 302_4
Kereta = 1100_4

(b) $1100_4 + 302_4 = 2002_4$

(c) Beza antara yang berjalan kaki dengan menunggang motosikal = 24_7

Semak Jawapan

$80 + 50 = 130_{10}$

$4 \mid 130$
$4 \mid 32 - 2$
$4 \mid 8 - 0$
$4 \mid 2 - 0$
$0 - 2$
$= 2002_4$

Praktis Kendiri 2.1d

1. Seutas tali dipotong kepada empat bahagian yang sama panjang. Tentukan nilai x.

2. Markah Alex Wong dalam mata pelajaran Sejarah, Matematik dan Bahasa Melayu ialah 82_9, 234_5 dan 11001_2 masing-masing.

(a) Berapakah jumlah markah yang diperoleh Alex Wong dalam asas sepuluh?

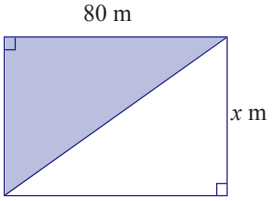
(b) Apakah beza markah antara mata pelajaran Bahasa Melayu dengan Matematik? Berikan jawapan anda dalam asas lima.

3. Sebuah kedai jam memberikan diskaun bagi beberapa jenama jam tangan wanita bersempena dengan Hari Ibu. Setelah potongan diskaun Puan Santhi membeli jam tangan jenama M yang berharga RM134_5 dan Puan Amirah membeli jam tangan jenama N yang berharga RM50_7. Siapakah yang mendapat diskaun yang lebih tinggi?

Jenama M Jenama N

RM80 RM70

4. Ashri Satem seorang pemaju taman perumahan ingin membina sebuah taman permainan berbentuk segi empat tepat. Taman permainan tersebut dibahagikan kepada dua bahagian iaitu yang berwarna ialah kawasan permainan kanak-kanak dan yang tidak berwarna ialah kawasan senaman orang dewasa. Jika perimeter taman permainan itu adalah 3300_4 m, hitung luas kawasan permainan kanak-kanak.



Praktis Komprehensif

1. Lengkapkan urutan nombor asas yang diberikan mengikut tertib menaik.

(a) 234_5, ☐ , ☐ , ☐ .

(b) 101_2, ☐ , ☐ , ☐ .

(c) 30_7, ☐ , ☐ , ☐ .

2. Nyatakan nilai digit 2 dalam nombor $3\underline{2}40_4$.

3. (a) Tukar 111001110_2 kepada asas lapan.

(b) Tukar 367_8 kepada asas dua.

4. Tukar nombor 287_9 kepada asas nombor yang berikut.

(a) asas dua (b) asas lima

(c) asas tujuh (d) asas lapan

5. Hitung nilai yang berikut.

(a) $111_2 + 1110_2$ (b) $140_7 + 302_7$ (c) $275_9 - 218_9$

6. Tentukan sama ada pernyataan berikut benar atau palsu.

(a) $123_4 > 23_8$ (b) $72_9 < 341_5$ (c) $452_6 > 334_8$

7. Hitung nilai $110_2 + 278_9 + 132_4$ dalam asas sepuluh.

8. Hitung nilai $231_4 - 110_2$ dalam asas sepuluh.

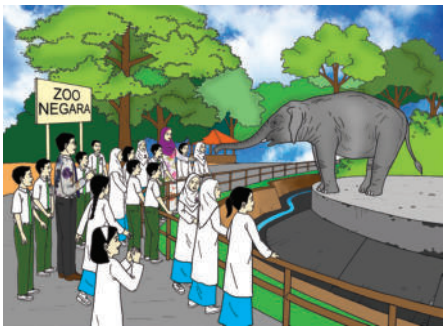
9. Diberi $1122_3 + y_7 = 118_9$, hitung nilai y.

10. Isi tempat kosong dengan nombor urutan menaik mengikut asas yang diberikan.

(a) 63_8, 110100_2, $\square\square_8$, $\square\square\square\square\square\square_2$, 67_8.

(b) 124_{10}, 148_9, $\square\square\square_8$, 241_7, $\square\square\square\square_5$.

11. Jumlah pelawat yang mengunjungi Zoo Negara pada bulan Januari adalah sebanyak 20202_5. Berapakah purata bilangan pelawat yang mengunjungi Zoo Negara pada bulan Januari, jika Zoo Negara dibuka setiap hari. Berikan jawapan dalam asas lima.



12. Azizan membeli sebuah beg yang mengandungi 100 biji bola kecil untuk anaknya. $\frac{1}{5}$ daripada bola tersebut berwarna hijau, $\frac{1}{4}$ berwarna kuning, $\frac{1}{10}$ berwarna merah jambu dan yang bakinya berwarna biru. Berapakah bilangan bola berwarna biru dalam asas lapan?

13. Kishendran membeli sehelai kemeja batik dengan potongan diskaun 25%. Harga asal kemeja tersebut ialah $RM220_4$. Berapakah harga kemeja tersebut selepas potongan diskaun dalam asas tujuh?

PROJEK

Tahukah anda selain nombor dalam asas dua hingga asas sepuluh, terdapat pelbagai asas nombor lain seperti nombor asas enam belas, asas tiga puluh dua dan asas enam puluh empat? Dengan melayari Internet, terangkan penggunaan asas-asas ini dalam bidang sains dan teknologi maklumat dengan memberikan contoh yang sesuai.

PETA KONSEP

Asas Nombor

Penukaran asas

Tukar asas sepuluh kepada asas lain dan sebaliknya.

Nilai tempat	6^2	6^1	6^0
Nombor asas 6	2	5	3
Nilai nombor dalam asas 10	$(2 \times 6^2) + (5 \times 6^1) + (3 \times 6^0)$ $= 105_{10}$		

$$\begin{array}{r|l} 9 & 105 \\ 9 & 11 \;-6 \\ 9 & 1 \;-2 \\ & 0 \;-1 \end{array}$$

$253_6 = 105_{10} = 126_9$

Tukar asas dua kepada asas lapan dan sebaliknya.

Nombor asas 2	1	1	0	1	1	1
Nilai tempat	2^2	2^1	2^0	2^2	2^1	2^0
Nilai digit	4	2	0	4	2	1
Asas 8	$4+2+0$ $= 6$			$4+2+1$ $= 7$		
	67_8					

$110111_2 = 67_8$

Asas 8	5			1			7		
	$4+1$			1			$4+2+1$		
Nilai tempat	2^2	2^1	2^0	2^2	2^1	2^0	2^2	2^1	2^0
Asas 2	1	0	1	0	0	1	1	1	1
	101001111_2								

$517_8 = 101001111_2$

Pengiraan melibatkan operasi tambah dan tolak

Bentuk Lazim

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 1\;1\;0_2 \\ +\;\;1\;1\;1_2 \\ \hline 1\;1\;0\;1_2 \end{array}$$

$0 + 1 = 1_{10} = 1_2$
$1 + 1 = 2_{10} = 10_2$
$1 + 1 + 1 = 3_{10} = 11_2$

Penukaran Asas

$110_2 \rightarrow 6_{10}$
$111_2 \rightarrow +\ 7_{10}$
13_{10}

$$\begin{array}{r|l} 2 & 13 \\ 2 & 6 \;-1 \\ 2 & 3 \;-0 \\ 2 & 1 \;-1 \\ & 0 \;-1 \end{array}$$

$110_2 + 111_2 = 1101_2$

Bentuk Lazim

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 5\;7\;3\;7} \\ 6\;2\;4\;1_7 \\ -\;\;6\;1\;3_7 \\ \hline 5\;3\;2\;5_7 \end{array}$$

$7 + 1 - 3 = 5_7$
$3 - 1 = 2_7$
$7 + 2 - 6 = 3_7$

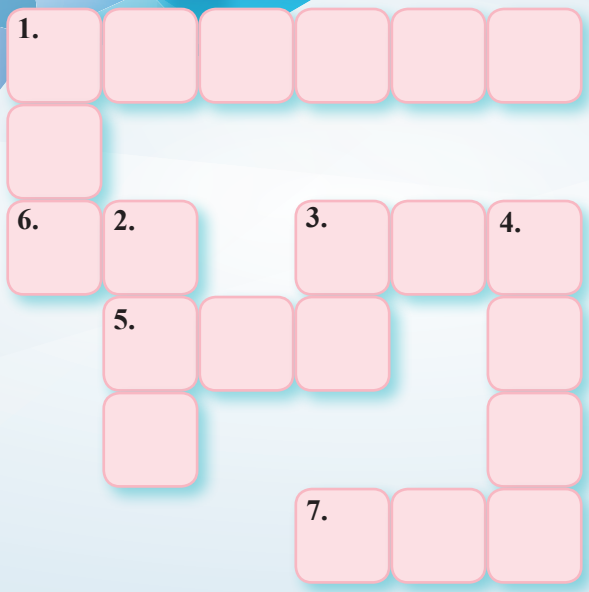
Penukaran Asas

$6241_7 \rightarrow 2185_{10}$
$613_7 \rightarrow -\ 304_{10}$
1881_{10}

$$\begin{array}{r|l} 7 & 1881 \\ 7 & 268 \;-5 \\ 7 & 38 \;-2 \\ 7 & 5 \;-3 \\ & 0 \;-5 \end{array}$$

$6241_7 - 613_7 = 5325_7$

Refleksi Kendiri



Melintang

1. Tukar nilai 65_8 dalam asas dua.
3. Tukar nilai 43_{10} dalam asas empat.
5. Tukar 633_7 dalam asas sepuluh.
6. Hitung hasil tambah $132_4 + 110_2$ dalam asas sepuluh.
7. Hitung hasil tambah $2220_3 + 211_3$ dalam asas sepuluh.

Menegak

1. Hitung beza $461_7 - 141_5$ dalam asas sepuluh.
2. Tukar nilai 110011110_2 dalam asas lapan.
3. Hitung hasil tambah $10101_2 + 111_2$ dalam asas sepuluh.
4. Tukar nilai 400_{10} dalam asas lima.

Imbas *QR Code* untuk menjalankan aktiviti ini.
http://yakin-pelajar.com/Bab2/53.pdf

Eksplorasi Matematik

Setiap nombor asas sepuluh boleh ditulis dalam asas nombor yang lain. Anda perlu menyediakan satu carta nombor pelbagai asas seperti jadual di bawah.
Apakah perkaitan antara asas nombor yang diberikan?

Asas 10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	...	50
Asas 2																				
Asas 4																				
Asas 8																				
Asas 16																				
Asas 32																				

Penaakulan Logik

Anda akan mempelajari

- Pernyataan
- Hujah

Parlimen ialah badan perundangan bagi kerajaan Persekutuan. Semua rang undang-undang perlulah dibahaskan dan diluluskan oleh Dewan Rakyat dan Dewan Negara sebelum mendapat perkenan Yang di-Pertuan Agong.

Tahukah anda mengapakah setiap rang undang-undang perlu dibahaskan di Parlimen?

Maslahat Bab

Selain perbahasan, penaakulan logik juga sering diaplikasikan dalam bidang elektronik terutamanya dalam kitaran elektronik. Penaakulan logik turut memainkan peranan penting dalam pengaturcaraan komputer dan reka bentuk perkakasan komputer. Dalam kehidupan harian kita, penaakulan logik penting diaplikasikan dalam proses menyelesaikan masalah kerana dapat mengasah kemahiran berfikir secara kritis dan analitis dalam diri seseorang itu.

JARINGAN KATA

• akas	• *converse*
• deduktif	• *deductive*
• hujah	• *argument*
• implikasi	• *implication*
• induktif	• *inductive*
• kontrapositif	• *contrapositive*
• penafian	• *negation*
• pengkuantiti	• *quantifier*
• pernyataan	• *statement*
• pernyataan majmuk	• *compound statement*
• songsangan	• *inverse*

Imbasan Silam

Aristotle
(384 SM - 322 SM)

Menurut Aristotle, logik bukan sebahagian daripada falsafah tetapi sejenis instrumen yang digunakan oleh ahli falsafah dan ahli sains. Beliau menggunakan logik sebagai teknik perbahasan dan ilmu linguistik.

http://yakin-pelajar.com/Aristotle/3.pdf

3.1 Pernyataan

Apakah maksud pernyataan dan bagaimanakah anda menentukan nilai kebenaran bagi suatu pernyataan?

Standard Pembelajaran

Menerangkan maksud pernyataan dan seterusnya menentukan nilai kebenaran bagi suatu pernyataan.

Kebanyakan hasil matematik sering melibatkan pernyataan.

> Pernyataan ialah suatu ayat yang dapat ditentukan nilai kebenarannya, iaitu sama ada benar atau palsu, tetapi bukan kedua-duanya.

Ayat tanya, ayat seruan dan ayat perintah bukan pernyataan. Ayat-ayat ini tidak dapat ditentukan kebenarannya.

Kedua-dua jawapan yang diberikan dalam dialog di atas ialah pernyataan. Pernyataan "sebuah kuboid mempunyai 8 bucu" ialah pernyataan benar manakala pernyataan "sebuah kuboid mempunyai 12 bucu" ialah pernyataan palsu. Pernyataan boleh dibahagikan kepada pernyataan benar dan pernyataan palsu.

Contoh 1

Tentukan sama ada ayat-ayat di bawah ialah pernyataan atau bukan pernyataan.
Berikan justifikasi anda.

(a) Tolong hantar buku kerja.
(b) Menara Kuala Lumpur ialah menara yang paling tinggi di Malaysia.
(c) Bagaimanakah anda datang ke sekolah?
(d) $x + 3 = 5$.
(e) $-6 < -8$.

Penyelesaian:

(a) Bukan pernyataan kerana ayat itu tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya.
(b) Pernyataan kerana ayat itu benar.
(c) Bukan pernyataan kerana ayat itu tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya.
(d) Bukan pernyataan kerana ayat itu tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya.
(e) Pernyataan kerana ayat itu palsu.

Malaysiaku

Menara Kuala Lumpur terletak di kemuncak Bukit nanas. Menara Kuala Lumpur dengan ketinggian 421 meter ialah menara komunikasi yang ke-7 paling tinggi di dunia dan paling tinggi di Asia Tenggara.

Rangsangan Minda 1

Tujuan: Menentukan nilai kebenaran bagi pernyataan yang diberikan.

Langkah:

1. Bahagikan murid kepada beberapa kumpulan yang sesuai.
2. Nyatakan sama ada ayat matematik yang diberikan dalam Lembaran Aktiviti ialah pernyataan benar atau pernyataan palsu dengan *Round Robin*.
3. Bincang dan buat kesimpulan daripada dapatan aktiviti.

Lembaran Aktiviti:

	Ayat matematik	Nilai kebenaran
(a)	$28 + 12 = 40$	
(b)	$3^2 + 4^2 = 7^2$	
(c)	$(2 + 3)(2 - 3) = 2^2 - 3^2$	
(d)	$\sqrt{729} = 81^{\frac{3}{2}}$	
(e)	$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$	
(f)	{a, b} mempunyai 4 subset.	
(g)	5 ialah faktor bagi 400.	
(h)	Gandaan sepunya terkecil bagi nombor 4 dan 18 ialah 36.	

Perbincangan:

Adakah semua pernyataan matematik benar? Bincangkan sebab anda.

Hasil daripada Rangsangan Minda 1, didapati bahawa;

> Bukan semua pernyataan matematik benar. Nilai kebenaran bagi semua pernyataan matematik boleh ditentukan.

Contoh 2

Tentukan sama ada pernyataan berikut benar atau palsu. Sekiranya palsu, buktikan.

(a) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy - y^2, x \neq 0, y \neq 0$
(b) $(x + 5)^2 < 0, x \in \mathbf{R}$
(c) $2 + 6(4) > 4 + 6(2)$
(d) $2 \in$ {Faktor bagi 8}
(e) {2, 5, 7} $\cup$ {Nombor Perdana} = {2, 5, 7}

ZON INFORMASI

$x \in \mathbf{R}$ bermaksud x unsur kepada nombor nyata.

- Nombor nyata boleh ditakrifkan sebagai sebarang nombor nisbah atau nombor bukan nisbah.

Penyelesaian:

(a) Palsu Andaikan $x = 2$ dan $y = 3$,

$$(x + y)^2 = (2 + 3)^2 = 25$$
$$x^2 + 2xy - y^2 = 2^2 + 2(2)(3) - 3^2 = 7$$

Maka $(x + y)^2 \neq x^2 + 2xy - y^2$

(b) Palsu $(2 + 5)^2 = 49 > 0$

(c) Benar

(d) Benar

(e) Palsu

{2, 5, 7} $\cup$ {2, 3, 5, 7, 11, 13, ...} = {Nombor perdana}

Contoh 3

Tentukan sama ada pernyataan matematik di bawah benar atau palsu. Sekiranya palsu, buktikan.

(a) Semua poligon mempunyai pepenjuru.

(b) Sebilangan nombor kuasa dua sempurna ialah nombor bulat.

(c) Semua nombor genap mempunyai faktor perdana.

(d) Sebilangan garis lurus memintas paksi-y.

Penyelesaian:

(a) Palsu. Segi tiga tidak mempunyai pepenjuru.

(b) Palsu. Semua nombor kuasa dua sempurna ialah nombor bulat.

(c) Benar

(d) Benar

Praktis Kendiri 3.1a

1. Tentukan sama ada ayat-ayat di bawah pernyataan atau bukan pernyataan. Berikan justifikasi anda.

(a) Marilah kita pergi bermain di padang.

(b) Malaysia terletak di benua Asia.

(c) Adakah $3 + 2 = 8$?

(d) $x + 3 > x - 8$

(e) $3x + 5 = -7$

2. Bina satu pernyataan yang benar dengan menggunakan angka dan simbol yang diberikan.

(a) 23, +, 9, 40, >

(b) {3, 6, 9}, {3}, $\subset$

(c) $\frac{5}{6}, \frac{1}{4}, \times, \frac{10}{3}, =$

(d) $x^2 + 3, \leqslant, (x + 3)^2$

(e) $\sqrt[3]{\ }$, 9, 27, 12, =, +

3. Tentukan sama ada pernyataan di bawah benar atau palsu.

(a) Semua segi empat mempunyai sudut tepat.

(b) Sebilangan rombus mempunyai empat sisi yang sama.

(c) Semua segi tiga mempunyai sisi yang sama panjang.

(d) Sebilangan poligon mempunyai lima sisi.

(e) Semua bulatan boleh dibahagikan kepada lapan sektor yang sama saiz.

Bagaimanakah anda menafikan suatu pernyataan?

Standard Pembelajaran

Menafikan suatu pernyataan.

Indikator

'~p' disebut sebagai 'tilda p'

Kita menggunakan perkataan "tidak" atau "bukan" untuk menafikan suatu pernyataan. Penafian pernyataan p ditulis sebagai $\sim p$

Contoh 4

Bentuk satu penafian ($\sim p$) bagi setiap pernyataan (p) berikut dengan menggunakan perkataan "tidak" atau "bukan".

(a) 12 ialah gandaan 5.

(b) 41 ialah nombor perdana.

(c) Semua gandaan 5 ialah gandaan 10.

(d) 0.4 m bersamaan dengan 400 mm.

Penyelesaian:

(a) 12 bukan gandaan 5.

(b) 41 bukan nombor perdana.

(c) Bukan semua gandaan 5 ialah gandaan 10.

(d) 0.4 m tidak bersamaan dengan 400 mm.

Rangsangan Minda 2

Tujuan: Menentukan nilai kebenaran suatu pernyataan selepas penafian.

Langkah:

1. Bahagikan murid kepada beberapa kumpulan yang sesuai.
2. Tentukan kebenaran pernyataan di bawah.

   (a) Semua nombor genap boleh dibahagi tepat dengan 2.
   (b) Semua faktor 6 ialah faktor 8.
   (c) 64 ialah nombor kuasa tiga sempurna.
   (d) 50% daripada 600 ialah 30.
   (e) $\{a, b, c\}$ ialah subset kepada $\{a, b\} \cap \{b, c\}$.

3. Bentuk penafian bagi pernyataan-pernyataan dalam langkah 2 dengan menggunakan perkataan "bukan" atau "tidak".
4. Tentukan nilai kebenaran penafian pernyataan dalam langkah 3.

Perbincangan:

Apakah yang boleh anda nyatakan tentang nilai kebenaran pernyataan-pernyataan dalam langkah 2 sebelum dan selepas penafian?

Hasil daripada Rangsangan Minda 2, didapati bahawa;

Nilai kebenaran bertukar daripada benar kepada palsu atau sebaliknya melalui proses penafian.

Praktis Kendiri 3.1b

Bentuk satu penafian ($\sim p$) bagi setiap pernyataan (p) berikut dengan menggunakan perkataan "tidak" atau "bukan". Kemudian, tentukan nilai kebenaran penafian tersebut.

1. 819 ialah gandaan 9.

2. Lelayang mempunyai dua paksi simetri.

3. Kon mempunyai satu muka melengkung.

4. Dua garis selari mempunyai kecerunan yang sama.

5. Semua persamaan kuadratik mempunyai dua punca yang sama.

Bagaimanakah anda menentukan nilai kebenaran suatu pernyataan majmuk?

Standard Pembelajaran

Menentukan nilai kebenaran suatu pernyataan majmuk.

Pernyataan majmuk ialah gabungan dua atau lebih pernyataan dengan menggunakan perkataan "dan" atau "atau".

Contoh 5

Gabungkan pernyataan p dan q berikut dengan perkataan

(i) dan, (ii) atau.

(a) p : Pentagon mempunyai dua pepenjuru.
q : Heptagon mempunyai empat pepenjuru.

(b) p : Piramid mempunyai lima satah.
q : Piramid mempunyai lima bucu.

(c) p : -4 ialah integer.
q : 2 ialah integer.

Penyelesaian:

(a) (i) Pentagon mempunyai dua pepenjuru dan heptagon mempunyai empat pepenjuru.
(ii) Pentagon mempunyai dua pepenjuru atau heptagon mempunyai empat pepenjuru.

(b) (i) Piramid mempunyai lima satah dan lima bucu.
(ii) Piramid mempunyai lima satah atau lima bucu.

(c) (i) -4 dan 2 ialah integer.
(ii) -4 atau 2 ialah integer.

Contoh 6

Tentukan dua pernyataan p dan q daripada ayat majmuk di bawah.

(a) $5 + 3 > 5$ dan $5 - 3 < 5$.

(b) 9 dan 91 ialah nombor perdana.

(c) $2^2 = 4$ atau $2^3 = 8$.

(d) $-9 < 10$ atau $9 < 10$.

Penyelesaian:

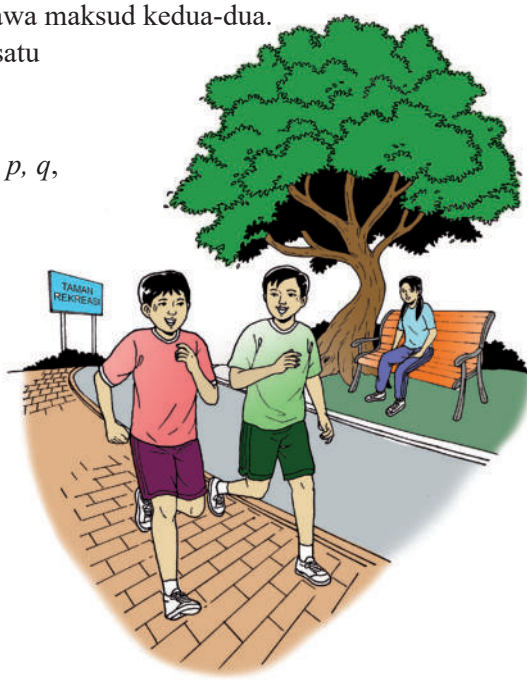
(a) p : $5 + 3 > 5$.
q : $5 - 3 < 5$.

(b) p : 9 ialah nombor perdana.
q : 91 ialah nombor perdana.

(c) p : $2^2 = 4$.
q : $2^3 = 8$.

(d) p : $-9 < 10$.
q : $9 < 10$.

Perkataan "dan" dalam pernyataan matematik membawa maksud kedua-dua. Manakala perkataan "atau" membawa maksud salah satu atau kedua-dua.



Berdasarkan gambar rajah di sebelah, tiga pernyataan p, q, dan r dibentuk.

p : Rashid sedang berlari.

q : Kok Keong sedang berlari.

r : Melinda sedang berlari.

Anda boleh gabungkan dua pernyataan dengan menggunakan perkataan "dan" atau "atau".

p dan q : Rashid dan Kok Keong sedang berlari.

p dan r : Rashid dan Melinda sedang berlari.

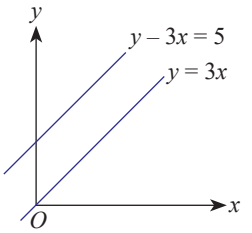
q atau r : Kok Keong atau Melinda sedang berlari.

Daripada tiga pernyataan majmuk di atas, kita dapati bahawa pernyataan "p dan q" benar kerana kedua-dua Rashid dan Kok Keong sedang berlari tetapi "p dan r" adalah palsu kerana bukan kedua-dua Rashid dan Melinda sedang berlari. Akan tetapi, pernyataan majmuk "q atau r" benar kerana sebahagian daripada pernyataan itu benar.

Maka, nilai kebenaran pernyataan majmuk boleh disimpulkan seperti yang ditunjukkan dalam jadual kebenaran berikut.

p	q	p dan q	p atau q
Benar	Benar	Benar	Benar
Benar	Palsu	Palsu	Benar
Palsu	Benar	Palsu	Benar
Palsu	Palsu	Palsu	Palsu

Contoh 7



Tentukan nilai kebenaran pernyataan majmuk yang berikut.

(a) 2 dan –5 lebih besar daripada 4.

(b) $x + 3 < x - 5$ dan 99 ialah nombor ganjil.

(c) 81 ialah nombor kuasa dua sempurna dan 6 ialah faktor bagi 18.

(d) $y = 3x$ selari dengan $y - 3x = 5$ dan pintasan-y bagi garis lurus $y - 3x = 5$ ialah 3.

(e) $2 + 3 = 23$ atau $2 \times 3 = 23$.

(f) $5 \times 5 \times 5 = 5^3$ atau $\sqrt{125} = 5$.

(g) Hasil tambah sudut pedalaman segi tiga atau segi empat ialah 360°.

(h) $4 - (-7) = 11$ atau $4 + 7 = 11$.

Penyelesaian:

		Pernyataan	Kebenaran
(a)	p	2 lebih besar daripada 4.	Palsu
	q	–5 lebih besar daripada 4.	Palsu
	p dan q	2 dan –5 lebih besar daripada 4.	Palsu
(b)	p	$x + 3 < x - 5$.	Palsu
	q	99 ialah nombor ganjil.	Benar
	p dan q	$x + 3 < x - 5$ dan 99 ialah nombor ganjil.	Palsu
(c)	p	81 ialah nombor kuasa dua sempurna.	Benar
	q	6 ialah faktor bagi 18.	Benar
	p dan q	81 ialah nombor kuasa dua sempurna dan 6 ialah faktor bagi 18.	Benar
(d)	p	$y = 3x$ selari dengan $y - 3x = 5$.	Benar
	q	Pintasan-y bagi garis lurus $y - 3x = 5$ ialah 3.	Palsu
	p dan q	$y = 3x$ selari dengan $y - 3x = 5$ dan pintasan-y bagi garis lurus $y - 3x = 5$ ialah 3.	Palsu
(e)	p	$2 + 3 = 23$.	Palsu
	q	$2 \times 3 = 23$.	Palsu
	p atau q	$2 + 3 = 23$ atau $2 \times 3 = 23$.	Palsu
(f)	p	$5 \times 5 \times 5 = 5^3$.	Benar
	q	$\sqrt{125} = 5$.	Palsu
	p atau q	$5 \times 5 \times 5 = 5^3$ atau $\sqrt{125} = 5$.	Benar
(g)	p	Hasil tambah sudut pedalaman segi tiga ialah 360°	Palsu
	q	Hasil tambah sudut pedalaman segi empat ialah 360°	Benar
	p atau q	Hasil tambah sudut pedalaman segi tiga atau segi empat ialah 360°	Benar
(h)	p	$4 - (-7) = 11$.	Benar
	q	$4 + 7 = 11$.	Benar
	p atau q	$4 - (-7) = 11$ atau $4 + 7 = 11$.	Benar

Praktis Kendiri 3.1c

1. Gabungkan pernyataan p dan q berikut dengan menggunakan perkataan yang diberi dalam kurungan untuk membentuk pernyataan majmuk.

(a) p : 2 ialah faktor perdana bagi 6. (atau)
q : 3 ialah faktor perdana bagi 6.

(b) p : Kon mempunyai satu bucu. (dan)
q : Kon mempunyai satu satah.

(c) p : Rombus ialah segi empat selari. (dan)
q : Trapezium ialah segi empat selari.

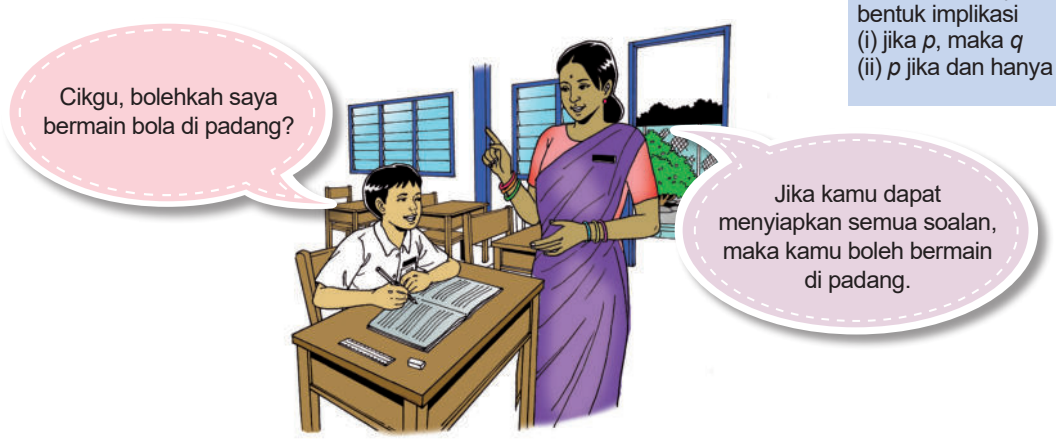
2. Tentukan nilai kebenaran pernyataan majmuk yang berikut.

(a) 49 ialah gandaan 7 dan nombor kuasa dua sempurna.
(b) 3 jam = 120 minit dan 4 minit = 240 saat.
(c) Pekali bagi $9x$ ialah 9 dan $9^0 = 0$.
(d) $3 \in \{1, 2, 5\}$ dan $\{8, 9\} \subset \{6, 7, 8\}$.
(e) $\frac{2}{9}$ boleh diungkap sebagai perpuluhan berulang atau kurang daripada 1.
(f) $\frac{4}{5}$ atau $\frac{5}{4}$ ialah pecahan wajar.
(g) 6 atau 8 ialah nombor ganjil.
(h) $\sqrt[4]{64} = 2$ atau $2^3 = 8$.

Bagaimanakah anda membina pernyataan dalam bentuk implikasi?

Standard Pembelajaran

Membina pernyataan dalam bentuk implikasi
(i) jika p, maka q
(ii) p jika dan hanya jika q



Implikasi "Jika p, maka q"

Pernyataan "jika p, maka q" dikenali sebagai **implikasi** dengan keadaan

- p dikenali sebagai **antejadian.**
- q dikenali sebagai **akibat.**

Contoh 8

Bentuk implikasi "jika p, maka q" dengan antejadian dan akibat berikut.

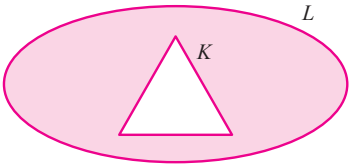
(a) Antejadian : k boleh dibahagi tepat dengan 5.
Akibat : k ialah gandaan 5.

(b) Antejadian : Set K subset kepada set L.
Akibat : $n(K) \leqslant n(L)$.

Penyelesaian:

(a) Jika k boleh dibahagi tepat dengan 5, maka k ialah gandaan 5.

(b) Jika set K subset kepada set L, maka $n(K) \leqslant n(L)$.



Contoh 9

Tentukan antejadian dan akibat daripada implikasi "jika p, maka q" berikut.

(a) Jika x ialah faktor bagi 16, maka x ialah faktor bagi 64.

(b) Jika $x - y > 0$, maka $x > y$.

Penyelesaian:

(a) Antejadian : x ialah faktor bagi 16.
Akibat : x ialah faktor bagi 64.

(b) Antejadian : $x - y > 0$.
Akibat : $x > y$.

Implikasi "p jika dan hanya jika q"

Selain implikasi "jika p, maka q", implikasi "p jika dan hanya jika q" juga kerap digunakan dalam penaakulan logik.

Implikasi "p jika dan hanya jika q" terdiri daripada dua implikasi yang berikut:

- jika p, maka q
- jika q, maka p

Contoh 10

Bentuk implikasi "p jika dan hanya jika q" bagi implikasi yang berikut.

(a) Jika k ialah nombor perdana, maka k mempunyai dua faktor sahaja.
Jika k mempunyai dua faktor sahaja, maka k ialah nombor perdana.

(b) Jika $y = ax^n + b$ ialah persamaan linear, maka $n = 1$.
Jika $n = 1$, maka $y = ax^n + b$ ialah persamaan linear.

Penyelesaian:

(a) k ialah nombor perdana jika dan hanya jika k mempunyai dua faktor sahaja.

(b) $y = ax^n + b$ ialah persamaan linear jika dan hanya jika $n = 1$.

Contoh 11

Tulis dua implikasi berdasarkan implikasi "p jika dan hanya jika q" yang berikut.

(a) $\sqrt{r} = 15$ jika dan hanya jika $r = 225$.

(b) $x < 6$ jika dan hanya jika $x + 10 < 16$.

Penyelesaian:

(a) Implikasi 1: Jika $\sqrt{r} = 15$, maka $r = 225$.
Implikasi 2: Jika $r = 225$, maka $\sqrt{r} = 15$.

(b) Implikasi 1: Jika $x < 6$, maka $x + 10 < 16$.
Implikasi 2: Jika $x + 10 < 16$, maka $x < 6$.

Praktis Kendiri 3.1d

1. Bentuk implikasi "jika p, maka q" dengan antejadian dan akibat berikut.

(a) Antejadian : $x = 3$
Akibat : $x^4 = 81$

(b) Antejadian : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ialah persamaan kubik.
Akibat : $a \neq 0$

(c) Antejadian : $n - 5 > 2n$
Akibat : $n < -5$

(d) Antejadian : $\frac{m}{n} > 1$
Akibat : $m^2 > n^2$

2. Tentukan antejadian dan akibat daripada implikasi "jika p, maka q" berikut.

(a) Jika x ialah nombor genap, maka x^2 ialah nombor genap.

(b) Jika set $K = \phi$, maka $n(K) = 0$.

(c) Jika x ialah nombor bulat, maka $2x$ ialah nombor genap.

(d) Jika garis lurus AB ialah tangen kepada bulatan P, maka garis lurus AB hanya menyentuh bulatan P pada satu titik sahaja.

3. Bentuk implikasi "p jika dan hanya jika q" bagi implikasi yang berikut.

(a) Jika k ialah nombor kuasa dua sempurna, maka $\sqrt{k}$ ialah nombor bulat.
Jika $\sqrt{k}$ ialah nombor bulat, maka k ialah nombor kuasa dua sempurna.

(b) Jika $P \cap Q = P$, maka $P \subset Q$.
Jika $P \subset Q$, maka $P \cap Q = P$.

(c) Jika $pq = 1$, maka $p = q^{-1}$ dan $q = p^{-1}$.
Jika $p = q^{-1}$ dan $q = p^{-1}$, maka $pq = 1$.

(d) Jika $k^2 = 4$, maka $(k + 2)(k - 2) = 0$.
Jika $(k + 2)(k - 2) = 0$, maka $k^2 = 4$.

4. Tulis dua implikasi berdasarkan implikasi "p jika dan hanya jika q" yang berikut.

(a) PQR ialah poligon sekata jika dan hanya jika $PQ = QR = PR$.

(b) $\frac{m}{n}$ ialah pecahan tidak wajar jika dan hanya jika $m > n$.

(c) 9 ialah pintasan-y bagi garis lurus $y = mx + c$ jika dan hanya jika $c = 9$.

(d) $f(x) = ax^2 + bx + c$ mempunyai titik maksimum jika dan hanya jika $a < 0$.

Bagaimanakah anda membina dan membandingkan nilai kebenaran akas, songsangan dan kontrapositif bagi suatu implikasi?

Standard Pembelajaran

Membina dan membandingkan nilai kebenaran akas, songsangan dan kontrapositif bagi suatu implikasi.

Sebelum membandingkan nilai kebenaran akas, songsangan dan kontrapositif suatu implikasi, perhatikan perbezaan antara empat jenis pernyataan tadi dengan contoh berikut.

Pernyataan : Jika Ali seorang pengawas, maka Ali seorang yang berdisiplin.
Akas : Jika Ali seorang yang berdisiplin, maka Ali seorang pengawas.
Songsangan : Jika Ali bukan seorang pengawas, maka Ali seorang yang tidak berdisiplin.
Kontrapositif : Jika Ali seorang yang tidak berdisiplin, maka Ali bukan seorang pengawas.

Secara generalisasi,

Pernyataan : Jika p, maka q.
Akas : Jika q, maka p.
Songsangan : Jika $\sim p$, maka $\sim q$.
Kontrapositif : Jika $\sim q$, maka $\sim p$.

Contoh 12

Tulis akas, songsangan dan kontrapositif bagi implikasi yang diberikan berikut.

(a) Jika x ialah nombor positif, maka x lebih besar daripada 0.

(b) Jika $p^2 - q^2 > 0$, maka $(p + q)(p - q) > 0$.

(c) Jika $x = 5$, maka $x + 1 = 6$.

Penyelesaian:

(a) Pernyataan : Jika x ialah nombor positif, maka x lebih besar daripada 0.
Akas : Jika x lebih besar daripada 0, maka x ialah nombor positif.
Songsangan : Jika x bukan nombor positif, maka x tidak lebih besar daripada 0.
Kontrapositif : Jika x tidak lebih besar daripada 0, maka x bukan nombor positif.

(b) Pernyataan : Jika $p^2 - q^2 > 0$, maka $(p + q)(p - q) > 0$.
Akas : Jika $(p + q)(p - q) > 0$, maka $p^2 - q^2 > 0$.
Songsangan : Jika $p^2 - q^2 \leqslant 0$, maka $(p + q)(p - q) \leqslant 0$.
Kontrapositif : Jika $(p + q)(p - q) \leqslant 0$, maka $p^2 - q^2 \leqslant 0$.

TIP

$\sim p$ merupakan pelengkap bagi p. Maka, pelengkap bagi $p^2 - q^2 > 0$ ialah $p^2 - q^2 \leqslant 0$.

(c) Pernyataan : Jika $x = 5$, maka $x + 1 = 6$.
Akas : Jika $x + 1 = 6$, maka $x = 5$.
Songsangan : Jika $x \neq 5$, maka $x + 1 \neq 6$.
Kontrapositif : Jika $x + 1 \neq 6$, maka $x \neq 5$.

Selepas mengenal pasti akas, songsangan dan kontrapositif suatu implikasi, anda akan menilai kebenaran pernyataan yang disebut tadi.

Rangsangan Minda 3

Tujuan: Membandingkan nilai kebenaran akas, songsangan dan kontrapositif bagi suatu implikasi berikut.

Langkah:

1. Tentukan nilai kebenaran bagi pernyataan p dan q bagi setiap implikasi yang terdapat dalam Lembaran Aktiviti.
2. Tulis akas, songsangan dan kontrapositif bagi implikasi "jika p, maka q". Kemudian, tentukan nilai kebenaran bagi pernyataan-pernyataan itu.

Lembaran Aktiviti

		Pernyataan	Nilai kebenaran
(a)	p:	12 ialah nombor genap.	Benar
	q:	12 boleh dibahagi tepat dengan 2.	Benar
	Pernyataan:	Jika 12 ialah nombor genap, maka 12 boleh dibahagi tepat dengan 2.	Benar
	Akas:		
	Songsangan:		
	Kontrapositif:		
(b)	p:	50 ialah gandaan 10.	
	q:	50 ialah gandaan 20.	
	Pernyataan:		
	Akas:	Jika 50 ialah gandaan 20, maka 50 ialah gandaan 10.	Benar
	Songsangan:		
	Kontrapositif:		
(c)	p:	Pentagon $PQRST$ mempunyai hasil tambah sudut pedalaman 360°.	
	q:	Pentagon $PQRST$ ialah sisi empat.	
	Pernyataan:		
	Akas:		
	Songsangan:	Jika pentagon $PQRST$ tidak mempunyai hasil tambah sudut pedalaman 360°, maka pentagon $PQRST$ bukan sisi empat.	Benar
	Kontrapositif:		
(d)	p:	$x^2 < 0$.	
	q:	$x^2 + 3 > 0$.	
	Pernyataan:		
	Akas:		
	Songsangan:		
	Kontrapositif:	Jika $x^2 + 3 \leqslant 0$, maka $x^2 \geqslant 0$.	Benar

Perbincangan:

1. Bandingkan nilai kebenaran kontrapositif dengan nilai kebenaran implikasi "jika p, maka q".
2. Apakah hubungan antara akas dengan songsangan bagi implikasi "jika p, maka q"?
3. Apakah perbezaan nilai kebenaran antara akas dan songsangan bagi implikasi "jika p, maka q"?

Hasil daripada Rangsangan Minda 3, didapati bahawa;

1. Nilai kebenaran kontrapositif sama dengan nilai kebenaran implikasi "jika p, maka q",
2. Akas dan songsangan adalah kontrapositif kepada satu sama lain,
3. Akas dan songsangan juga mempunyai nilai kebenaran yang sama.

Maka, anda boleh menyenaraikan nilai kebenaran bagi implikasi "jika p, maka q", akas, songsangan dan kontrapositif yang sepadannya dengan jadual berikut:

p	q	Pernyataan	Akas	Songsangan	Kontrapositif
		Jika p, maka q.	**Jika q, maka p.**	**Jika $\sim p$, maka $\sim q$.**	**Jika $\sim q$, maka $\sim p$.**
Benar	Benar	Benar	Benar	Benar	Benar
Benar	Palsu	Palsu	Benar	Benar	Palsu
Palsu	Benar	Benar	Palsu	Palsu	Benar
Palsu	Palsu	Benar	Benar	Benar	Benar

Secara kesimpulannya,

Nilai kebenaran implikasi "jika p, maka q" adalah sentiasa benar kecuali apabila p benar dan q palsu berlaku pada masa yang serentak. Jika sesuatu antejadian palsu, maka implikasi "jika p, maka q" sentiasa benar tanpa bergantung pada nilai kebenaran akibatnya.

Contoh 13

Tentukan nilai kebenaran implikasi, akas, songsangan dan kontrapositif bagi implikasi

"Jika $2 \times 3 = 6$, maka $8 - 2 \times 3 = 18$."

Penyelesaian:

Pernyataan		Antejadian	Akibat	Nilai kebenaran
Implikasi:	Jika $2 \times 3 = 6$, maka $8 - 2 \times 3 = 18$.	Benar	Palsu	Palsu
Akas:	Jika $8 - 2 \times 3 = 18$, maka $2 \times 3 = 6$.	Palsu	Benar	Benar
Songsangan:	Jika $2 \times 3 \neq 6$, maka $8 - 2 \times 3 \neq 18$.	Palsu	Benar	Benar
Kontrapositif	Jika $8 - 2 \times 3 \neq 18$, maka $2 \times 3 \neq 6$.	Benar	Palsu	Palsu

Praktis Kendiri 3.1e

1. Tulis akas, songsangan dan kontrapositif bagi setiap implikasi yang berikut.

(a) Jika $x + 3 > 2$, maka $x > -1$.

(b) Jika $(k - 3)(k + 4) = 0$ mempunyai dua punca berbeza, maka hasil tambah punca bagi $(k - 3)(k + 4) = 0$ ialah -1.

(c) Jika $ABCD$ ialah sebuah segi empat selari, maka AB selari dengan CD.

2. Tentukan nilai kebenaran implikasi, akas, songsangan dan kontrapositif bagi setiap pernyataan berikut.

(a) Jika 2 ialah faktor bagi 10, maka 10 boleh dibahagi tepat dengan 2.

(b) Jika 4 ialah punca bagi $x^2 - 16 = 0$, maka 4 bukan punca bagi $(x + 4)(x - 4) = 0$.

(c) Jika segi empat tepat mempunyai empat paksi simetri, maka segi empat tepat mempunyai empat sisi.

(d) Jika $55 + 55 = 4 \times 5$, maka $666 + 666 = 6 \times 6$.

Standard Pembelajaran

Menentukan contoh penyangkal untuk menafikan kebenaran pernyataan tertentu.

Bagaimanakah anda menentukan contoh penyangkal untuk menafikan kebenaran pernyataan tertentu?

Bagi setiap pernyataan palsu, sekurang-kurangnya satu contoh panyangkal boleh diberi untuk menafikan kebenaran pernyataan tersebut. Sebagai contoh, pernyataan "Semua poligon mempunyai dua atau lebih pepenjuru." adalah palsu kerana segi tiga tidak mempunyai pepenjuru. Segi tiga di sini merupakan contoh penyangkal untuk menyokong nilai palsu tersebut.

Contoh 14

Tentukan nilai kebenaran pernyataan matematik di bawah. Sekiranya palsu, berikan satu contoh penyangkal untuk menyokong jawapan anda.

(a) Semua poligon mempunyai hasil tambah sudut pedalaman 180°.

(b) Sebilangan nombor perdana ialah nombor genap.

(c) 4 dan 8 ialah faktor bagi 20.

(d) 6 atau 36 ialah gandaan 9.

Penyelesaian:

(a) Palsu kerana pentagon mempunyai hasil sudut sudut pedalaman 540°.

(b) Benar.

(c) Palsu kerana 8 bukan faktor bagi 20.

(d) Benar.

Contoh 15

Tulis pernyataan matematik yang dikehendaki dalam kurungan bagi setiap yang berikut. Kemudian, tentukan nilai kebenaran bagi pernyataan yang ditulis. Sekiranya palsu, berikan satu contoh penyangkal untuk menyokong jawapan anda.

(a) $6 \in \{3, 6, 9\}$. (Penafian)

(b) Semua gandaan 10 ialah gandaan 2. (Penafian)

(c) Jika $x > 5$, maka $x > 3$. (Akas)

(d) Jika x punca kepada $x^3 - 1 = 0$, maka $x = 1$. (Songsangan)

(e) Jika $k^2 > 0$, maka $k > 0$. (Kontrapositif)

Penyelesaian:

(a) Penafian: $6 \notin \{3, 6, 9\}$. Palsu kerana 6 ialah unsur bagi $\{3, 6, 9\}$.

(b) Penafian: Bukan semua gandaan 10 ialah gandaan 2. Palsu kerana semua gandaan 10 boleh dibahagi tepat dengan 2.

(c) Akas: Jika $x > 3$, maka $x > 5$. Palsu kerana $4 > 3$ tetapi $4 < 5$.

(d) Songsangan: Jika x bukan punca kepada $x^3 - 1 = 0$, maka $x \neq 1$. Benar.

(e) Kontrapositif: Jika $k \leq 0$, maka $k^2 \leq 0$. Palsu kerana $-2 < 0$ tetapi $(-2)^2 = 4 > 0$.

Praktis Kendiri 3.1f

1. Tentukan nilai kebenaran bagi pernyataan matematik di bawah. Sekiranya palsu, berikan satu contoh penyangkal untuk menyokong jawapan anda.

(a) Semua segi empat tepat ialah segi empat sama.

(b) Sebilangan nombor kuasa dua sempurna boleh dibahagi tepat dengan 5.

(c) 5 atau 9 mempunyai dua faktor.

(d) 36 ialah gandaan 4 dan gandaan 14.

2. Tulis pernyataan matematik yang dikehendaki dalam kurungan bagi setiap yang berikut. Kemudian, tentukan nilai kebenaran bagi pernyataan yang ditulis. Sekiranya palsu, berikan satu contoh penyangkal untuk menyokong jawapan anda.

(a) $100_8 - 77_8 = 1_8$ (Penafian)

(b) Kuboid mempunyai empat keratan rentas seragam. (Penafian)

(c) Jika $y = 2x$ selari dengan $y = 2x - 1$, maka $y = 2x$ dan $y = 2x - 1$ mempunyai kecerunan yang sama. (Akas)

(d) Jika segi tiga ABC bersudut tepat di C, maka $c^2 = a^2 + b^2$. (Songsangan)

(e) Jika $w < 7$, maka $w < 5$. (Kontrapositif)

3.2 Hujah

Apakah maksud hujah? Apakah bezanya hujah deduktif dan hujah induktif?

Standard Pembelajaran

Menerangkan maksud hujah, dan membezakan hujah deduktif dan hujah induktif.

Daripada perbualan di atas, apakah kesimpulan yang boleh anda buat? Adakah Suhaimi telah menyiapkan kerja rumah matematiknya?

Proses membuat kesimpulan berdasarkan pernyataan dikenali sebagai penghujahan. Hujah boleh terdiri daripada beberapa premis dan satu kesimpulan. Premis merupakan satu pernyataan yang memberikan informasi sebelum satu kesimpulan dibuat dan kesimpulan merupakan suatu kesudahan pendapat atau keputusan. Suatu hujah ringkas biasanya terdiri daripada sekurang-kurangnya dua premis dan satu kesimpulan.

Rangsangan Minda 4

Tujuan: Membezakan pernyataan khusus dan pernyataan umum.

Langkah:

1. Bahagikan murid kepada beberapa kumpulan yang sesuai.
2. Bezakan pernyataan-pernyataan di bawah sama ada pernyataan khusus atau pernyataan umum. Bulatkan jawapan anda.

	Pernyataan	Jenis pernyataan	
(a)	Luas segi tiga ABC ialah 8 cm^2.	Khusus	Umum
(b)	Semua prisma mempunyai keratan rentas seragam.	Khusus	Umum
(c)	Semua gandaan 2 berakhir dengan digit genap.	Khusus	Umum
(d)	15 boleh dibahagi tepat dengan 3.	Khusus	Umum
(e)	$9^3 = 729$	Khusus	Umum
(f)	Isi padu kubus = x^3, dengan x ialah sisi kubus.	Khusus	Umum
(g)	Tinggi bagi silinder P ialah 80 cm.	Khusus	Umum
(h)	Semua nombor asas 5 terdiri daripada digit yang kurang daripada 5.	Khusus	Umum
(i)	$(x - 2)(x + 3) = 0$ mempunyai dua punca.	Khusus	Umum
(j)	Isi padu sfera ialah $\frac{4}{3}\pi j^3$, dengan keadaan j ialah jejari sfera.	Khusus	Umum

Perbincangan:
Berikan justifikasi anda.

Hasil daripada Rangsangan Minda 4, didapati bahawa;

> Pernyataan khusus ialah pernyataan yang khas merujuk suatu kes tertentu, manakala pernyataan umum ialah pernyataan yang menerangkan sesuatu konsep secara menyeluruh.

Terdapat dua jenis hujah, iaitu hujah deduktif dan hujah induktif. Cuba menjustifikasikan hujah induktif dan hujah deduktif melalui Rangsangan Minda 5 yang seterusnya.

Rangsangan Minda 5

Tujuan: Menjustifikasikan hujah deduktif dan hujah induktif.

Langkah:

1. Bahagikan murid kepada beberapa kumpulan yang sesuai.
2. Perhatikan hujah dalam Lembaran Aktiviti A.
3. Lengkapkan Lembaran Aktiviti B dengan menulis premis 1 dan kesimpulan bagi setiap hujah daripada Lembaran Aktiviti A. Seterusnya, tentukan jenis pernyataan bagi premis dan kesimpulan tersebut dan bulatkan perkataan khusus atau umum di bawah.

Lembaran Aktiviti A

Hujah			
(a)	Luas sebuah bulatan ialah πj^2. Bulatan A mempunyai jejari 7 cm. Kesimpulannya, luas bulatan A ialah 154 cm^2.	(b)	Semua gandaan 6 ialah gandaan 2 dan gandaan 3. 72 ialah gandaan 6. Maka, 72 ialah gandaan 2 dan gandaan 3.
(c)	$1^0 = 1$ $2^0 = 1$ $3^0 = 1$ $4^0 = 1$ ⋮ Kesimpulannya $n^0 = 1$, dengan keadaan $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$	(d)	$2(1)^3 - 4 = -2$ $2(2)^3 - 4 = 12$ $2(3)^3 - 4 = 50$ $2(4)^3 - 4 = 124$ ⋮ Maka, pola nombor –2, 12, 50, 124, … boleh dirumus sebagai $2n^3 - 4$, dengan keadaan $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$
(e)	Semua murid 4 Celik mendapat A dalam ujian Matematik. Camelia murid 4 Celik. Kesimpulannya, Camelia mendapat A dalam ujian Matematik.	(f)	Harimau ialah karnivor. Singa ialah karnivor. Buaya ialah karnivor. Penguin ialah karnivor. Maka, semua haiwan ialah karnivor.

Lembaran Aktiviti B

	Premis 1	Kesimpulan	Jenis hujah
(a)	Luas sebuah bulatan ialah πj^2. Umum / Khusus	Kesimpulannya, luas bulatan A ialah 154 cm^2. Umum / Khusus	Hujah Deduktif
(b)	Umum / Khusus	Umum / Khusus	Hujah Deduktif
(c)	Umum / Khusus	Umum / Khusus	Hujah Induktif
(d)	Umum / Khusus	Umum / Khusus	Hujah Induktif
(e)	Umum / Khusus	Umum / Khusus	Hujah Deduktif
(f)	Umum / Khusus	Umum / Khusus	Hujah Induktif

Perbincangan:
Berdasarkan jenis hujah yang telah diberikan, berikan justifikasi bagi hujah deduktif dan hujah induktif.

Hasil daripada Rangsangan Minda 5, didapati bahawa;

- Hujah deduktif ialah proses kesimpulan khusus dibina berdasarkan premis umum.
- Hujah induktif ialah proses kesimpulan umum dibina berdasarkan premis khusus.

Contoh 16

Tentukan sama ada hujah berikut ialah hujah deduktif atau hujah induktif.

(a) Semua sudut tirus kurang daripada 90°. Sudut PQR ialah sudut tirus. Maka, sudut PQR kurang daripada 90°.

(b) Semua wakil pertandingan sudoku ialah ahli Persatuan Matematik. Jamal ialah wakil pertandingan sudoku. Maka, Jamal ialah ahli Persatuan Matematik.

(c) Hasil tambah sudut peluaran segi tiga ialah 360°. Hasil tambah sudut peluaran segi empat ialah 360°. Hasil tambah sudut peluaran pentagon ialah 360°. Maka, hasil tambah sudut peluaran setiap poligon ialah 360°.

(d) Hasil tambah digit 18 boleh dibahagi tepat dengan 9. Hasil tambah digit 27 boleh dibahagi tepat dengan 9. Hasil tambah digit 36 boleh dibahagi tepat dengan 9. Maka, hasil tambah digit gandaan 9 boleh dibahagi tepat dengan 9.

Penyelesaian:

(a)

Premis 1:	Semua sudut tirus kurang daripada 90°. (Umum)
Kesimpulan:	Maka, sudut *PQR* kurang daripada 90°. (Khusus)

Hujah deduktif

(b)

Premis 1:	Semua wakil pertandingan sudoku ialah ahli Persatuan Matematik. (Umum)
Kesimpulan:	Maka, Jamal ialah ahli Persatuan Matematik. (Khusus)

Hujah deduktif

(c)

Premis 1:	Hasil tambah sudut peluaran segi tiga ialah 360°. (Khusus)
Kesimpulan:	Maka, hasil tambah sudut peluaran setiap poligon ialah 360°. (Umum)

Hujah induktif

(d)

Premis 1:	Hasil tambah digit 18 boleh dibahagi tepat dengan 9. (Khusus)
Kesimpulan:	Maka, hasil tambah digit gandaan 9 boleh dibahagi tepat dengan 9. (Umum)

Hujah induktif

Praktis Kendiri 3.2a

Tentukan sama ada hujah berikut ialah hujah deduktif atau hujah induktif.

1. Semua faktor bagi 6 ialah faktor bagi 12. 1, 2, 3 dan 6 ialah faktor bagi 6. Maka, 1, 2, 3 dan 6 ialah faktor bagi 12.

2. $5^2 \times 5^3 = 5^5$, $5^3 \times 5^4 = 5^7$, $5^4 \times 5^5 = 5^9$. Maka, $5^m \times 5^n = 5^{m+n}$.

3. $2(1) = 2$, $2(2) = 4$, $2(3) = 6$, … . Maka pola nombor 2, 4, 6, … boleh ditulis sebagai $2n$; $n = 1, 2, 3, \ldots$.

4. Semua poligon sekata mempunyai sisi yang sama panjang. *ABCDEFG* ialah poligon sekata. Maka, *ABCDEFG* mempunyai sisi yang sama panjang.

5. Semua gandaan 10 berakhir dengan digit 0. Nombor 50 ialah gandaan 10. Maka, nombor 50 berakhir dengan digit 0.

6. $(1)^2 + 2 = 3$, $(2)^2 + 2 = 6$, $(3)^2 + 2 = 11\ldots$. Maka, pola nombor 3, 6 , 11, … boleh ditulis sebagai $n^2 + 2$; $n = 1, 2, 3, \ldots$.

7. $(1 + 1)^2 = 4$, $(1 + 2)^2 = 9$, $(1 + 3)^2 = 16$, … . Maka, pola nombor 4, 9, 16, … boleh ditulis sebagai $(1 + n)^2$; $n = 1, 2, 3, \ldots$.

8. Semua gandaan 9 ialah gandaan 3. Nombor 72 ialah gandaan 9. Maka, nombor 72 ialah gandaan 3.

9. Semua nombor nisbah boleh ditulis dalam bentuk pecahan. 1.5 ialah nombor nisbah. Maka 1.5 boleh ditulis dalam bentuk pecahan.

10. Sudut penggenap bagi 60° ialah 120°. Sudut penggenap bagi 45° ialah 135°. Maka sudut penggenap bagi θ ialah $180° - \theta$.

Bagaimanakah anda menentukan dan menjustifikasikan kesahan suatu hujah deduktif dan seterusnya menentukan sama ada hujah yang sah itu munasabah?

Standard Pembelajaran

Menentukan dan menjustifikasikan kesahan suatu hujah deduktif dan seterusnya menentukan sama ada hujah yang sah itu munasabah.

Hujah deduktif yang sah boleh dikategorikan kepada tiga bentuk berikut.

	Bentuk I	Bentuk II	Bentuk III
Premis 1	Semua A ialah B	Jika p, maka q	Jika p, maka q
Premis 2	C ialah A	p adalah benar	Bukan q adalah benar
Kesimpulan	C ialah B	q adalah benar	Bukan p adalah benar

Suatu hujah deduktif dikatakan munasabah jika semua premis dan kesimpulannya adalah benar.

Premis 1: Semua pelakon pandai menari.
Premis 2: Jasmine ialah pelakon.
Kesimpulan: Jasmine pandai menari.

Hujah di atas merupakan satu hujah yang sah. Walaupun kita tahu bahawa Premis 1 adalah palsu (bukan semua pelakon pandai menari) tetapi hujah ini masih sah kerana hujah ini memenuhi Bentuk I seperti dalam jadual di atas. Tetapi hujah di atas adalah tidak munasabah kerana Premis 1 adalah palsu.

Rangsangan Minda 6

Tujuan: Menentukan dan menjustifikasikan kesahan suatu hujah.
Langkah:
1. Bahagikan murid kepada beberapa kumpulan yang sesuai.
2. Perhatikan hujah di bawah.

Premis 1: Semua pelakon pandai menari.
Premis 2: Jasmine pandai menari.
Kesimpulan: Jasmine ialah pelakon.

Perbincangan:
1. Mengapakah hujah di atas tidak sah?
2. Adakah semua premis dalam suatu hujah benar menjamin kesahan suatu hujah?

Hasil daripada Rangsangan Minda 6, didapati bahawa;

Hujah di atas tidak sah kerana tidak mematuhi ketiga-tiga bentuk deduktif yang sah. Maka, premis yang benar tidak menjamin kesahan suatu hujah.

Secara generalisasi,

Kesahan suatu hujah ditentukan berdasarkan bentuk hujah tersebut, bukan berdasarkan kebenaran premis atau kesimpulan.

Contoh 17

Adakah hujah di bawah sah dan munasabah? Sekiranya tidak, berikan justifikasi anda.

(a) Premis 1: Semua gandaan 16 ialah nombor genap.
Premis 2: 64 ialah gandaan 16.
Kesimpulan: 64 ialah nombor genap.

(b) Premis 1: Semua bola keranjang berbentuk sfera.
Premis 2: Bumi berbentuk sfera.
Kesimpulan: Bumi ialah bola keranjang.

(c) Premis 1: Jika $w < 9$, maka $w < 19$.
Premis 2: $4 < 9$.
Kesimpulan: $4 < 19$.

(d) Premis 1: Jika $a \neq 0$, maka $ax^n + bx + c$ ialah ungkapan kuadratik.
Premis 2: $a \neq 0$.
Kesimpulan: $ax^n + bx + c$ ialah ungkapan kuadratik.

(e) Premis 1: Jika k boleh dibahagi tepat dengan 8, maka k boleh dibahagi tepat dengan 4.
Premis 2: 12 tidak boleh dibahagi tepat dengan 8.
Kesimpulan: 12 tidak boleh dibahagi tepat dengan 4.

(f) Premis 1: Jika k ialah nombor genap, maka $k + 1$ ialah nombor ganjil.
Premis 2: $8 + 1$ ialah nombor ganjil.
Kesimpulan: 8 ialah nombor genap.

Penyelesaian:

(a) Sah dan munasabah.

(b) Tidak sah kerana tidak mematuhi bentuk hujah deduktif yang sah. Tidak munasabah kerana kesimpulan adalah palsu.

(c) Sah dan munasabah.

(d) Sah tetapi tidak munasabah kerana premis 1 dan kesimpulan tidak benar.

(e) Tidak sah kerana tidak mematuhi bentuk hujah deduktif yang sah. Tidak munasabah kerana kesimpulannya palsu.

(f) Tidak sah tetapi munasabah kerana tidak mematuhi bentuk hujah deduktif yang sah.

Praktis Kendiri 3.2b

Adakah hujah di bawah sah dan munasabah? Sekiranya tidak, berikan justifikasi anda.

1. Premis 1: Semua gandaan 5 ialah gandaan 10.
Premis 2: 35 ialah gandaan 5.
Kesimpulan: 35 ialah gandaan 10.

2. Premis 1: Semua segi empat sama bersudut tepat.
Premis 2: *PQRS* ialah segi empat sama.
Kesimpulan: *PQRS* bersudut tepat.

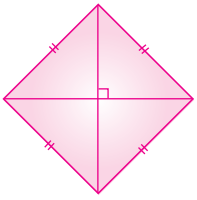
3. Premis 1: Jika $\sqrt{x} < 3$, maka $x < 9$.
Premis 2: $\sqrt{4} < 3$.
Kesimpulan: $4 < 9$.

4. Premis 1: Jika $k - 5 < 9$, maka $k > 9$.
Premis 2: $10 - 5 < 9$.
Kesimpulan: $10 > 9$.

5. Premis 1: Jika x ialah faktor bagi 6, maka 6 boleh dibahagi tepat dengan x.
Premis 2: 6 boleh dibahagi tepat dengan 3.
Kesimpulan: 3 ialah faktor bagi 6.

6. Premis 1: Jika l_1 selari dengan l_2, maka kecerunan l_1 = kecerunan l_2.
Premis 2: Kecerunan $l_1 \neq$ kecerunan l_2.
Kesimpulan: l_1 tidak selari dengan l_2.

7. Premis 1: Semua rombus mempunyai pepenjuru yang berserenjang.
Premis 2: *PQRS* mempunyai pepenjuru yang berserenjang.
Kesimpulan: *PQRS* ialah rombus.



8. Premis 1: Jika x nombor genap, maka $3x$ nombor genap.
Premis 2: $3x$ bukan nombor genap.
Kesimpulan: x bukan nombor genap.

9. Premis 1: Jika $k > 5$, maka $k^2 > 25$.
Premis 2: $k \leqslant 5$.
Kesimpulan: $k^2 \leqslant 25$.

10. Premis 1: Semua kubus ialah kuboid.
Premis 2: Objek *P* ialah kubus.
Kesimpulan: Objek *P* ialah kuboid.

Bagaimanakah anda membentuk hujah deduktif yang sah bagi suatu situasi?

Standard Pembelajaran

Membentuk hujah deduktif yang sah bagi suatu situasi.

Contoh 18

Bentuk suatu hujah deduktif yang sah bagi setiap situasi yang berikut.

(a) Semua mamalia menyusui anaknya. Kucing ialah mamalia. Kucing menyusui anaknya.

(b) Jika x lebih besar daripada 0, maka x bernilai positif. 6 lebih besar daripada 0. 6 bernilai positif.

(c) Jika x ialah nombor ganjil, maka $x + 1$ boleh dibahagi tepat dengan 2. $18 + 1$ tidak boleh dibahagi tepat dengan 2. 18 bukan nombor ganjil.

Penyelesaian:

(a) Premis 1 : Semua mamalia menyusui anaknya.
Premis 2 : Kucing ialah mamalia.
Kesimpulan : Kucing menyusui anaknya.

(b) Premis 1 : Jika x lebih besar daripada 0, maka x bernilai positif.
Premis 2 : 6 lebih besar daripada 0.
Kesimpulan : 6 bernilai positif.

(c) Premis 1 : Jika x ialah nombor ganjil, maka $x + 1$ boleh dibahagi tepat dengan 2.
Premis 2 : $18 + 1$ tidak boleh dibahagi tepat dengan 2.
Kesimpulan : 18 bukan nombor ganjil.

Contoh 19

Tulis kesimpulan bagi setiap hujah deduktif berikut untuk membentuk hujah deduktif yang sah dan munasabah.

(a) Premis 1 : Semua nombor bulat ialah nombor nyata.
Premis 2 : 38 ialah nombor bulat.
Kesimpulan :

(b) Premis 1 : Jika $ax^2 + bx + c = 0$ mempunyai punca nyata, maka $b^2 - 4ac \geqslant 0$.
Premis 2 : $2x^2 + px - 2 = 0$ mempunyai punca nyata.
Kesimpulan :

(c) Premis 1 : Jika garis lurus $y = mx + c$ selari dengan paksi-x, maka $m = 0$.
Premis 2 : $m \neq 0$.
Kesimpulan :

Penyelesaian:

(a) Premis 1 : Semua nombor bulat ialah nombor nyata.
Premis 2 : 38 ialah nombor bulat.
Kesimpulan : 38 ialah nombor nyata.

(b) Premis 1 : Jika $ax^2 + bx + c = 0$ mempunyai punca nyata, maka $b^2 - 4ac \geqslant 0$.
Premis 2 : $2x^2 + px - 2 = 0$ mempunyai punca nyata.
Kesimpulan : $p^2 - 4(2)(-2) \geqslant 0$.

MEMORI SAYA
Bagi $2x^2 + px - 2 = 0$
$a = 2$, $b = p$ dan $c = -2$

(c) Premis 1 : Jika garis lurus $y = mx + c$ selari dengan paksi-x, maka $m = 0$.
Premis 2 : $m \neq 0$.
Kesimpulan : Garis lurus $y = mx + c$ tidak selari dengan paksi-x.

Contoh 20

Tulis premis bagi setiap hujah deduktif berikut untuk membentuk hujah deduktif yang sah dan munasabah.

(a) Premis 1 :
Premis 2 : 37 ialah nombor perdana.
Kesimpulan : 37 hanya mempunyai dua faktor.

(b) Premis 1 : Jika jualan tahunan Syarikat ANC melebihi tiga juta, maka pekerjanya mendapat bonus tiga bulan gaji.
Premis 2 :
Kesimpulan : Jualan tahunan Syarikat ANC tidak melebihi tiga juta.

(c) Premis 1 : Jika $x = k$, maka k ialah punca bagi persamaan $3x^2 - 5 = 12$
Premis 2 :
Kesimpulan : $x \neq 9$.

Penyelesaian:

(a) Premis 1 : Semua nombor perdana hanya mempunyai dua faktor.
Premis 2 : 37 ialah nombor perdana.
Kesimpulan : 37 hanya mempunyai dua faktor.

(b) Premis 1 : Jika jualan tahunan Syarikat ANC melebihi tiga juta, maka pekerjanya mendapat bonus tiga bulan gaji.
Premis 2 : Pekerja Syarikat ANC tidak mendapat bonus tiga bulan gaji.
Kesimpulan : Jualan tahunan Syarikat ANC tidak melebihi tiga juta.

(c) Premis 1 : Jika $x = k$, maka k punca bagi persamaan $3x^2 - 5 = 12$.
Premis 2 : 9 bukan punca bagi persamaan $3x^2 - 5 = 12$.
Kesimpulan : $x \neq 9$.

Praktis Kendiri 3.2c

1. Tulis kesimpulan bagi setiap hujah deduktif berikut untuk membentuk hujah deduktif yang sah dan munasabah.

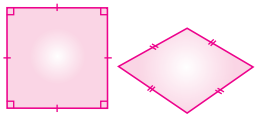
(a) Premis 1 : Semua murid 4 Amanah menggunakan buku teks digital.
Premis 2 : Preevena seorang murid 4 Amanah.
Kesimpulan :

(b) Premis 1 : Jika Kai Meng menjadi johan dalam pertandingan catur peringkat negeri, maka dia mendapat hadiah tunai RM200.

Premis 2 : Kai Meng menjadi johan dalam pertandingan catur peringkat negeri.

Kesimpulan :

(c) Premis 1 : Jika segi empat *PQRS* ialah poligon sekata, maka segi empat *PQRS* ialah segi empat sama.



Premis 2 : Segi empat *PQRS* bukan segi empat sama.

Kesimpulan :

(d) Premis 1 : Semua segi tiga sama kaki mempunyai satu paksi simetri.

Premis 2 : ΔABC ialah segi tiga sama kaki.

Kesimpulan :

(e) Premis 1 : Jika $3m = 2n$, maka $m : n = 2 : 3$.

Premis 2 : $3m = 2n$.

Kesimpulan :

(f) Premis 1 : Jika $m + 3 \leqslant 2m - 9$, maka $m \geqslant 12$.

Premis 2 : $m < 12$.

Kesimpulan :

2. Tulis premis bagi setiap hujah deduktif berikut untuk membentuk hujah deduktif yang sah.

(a) Premis 1 : Semua garis lurus yang mempunyai kecerunan sifar selari dengan paksi-x.

Premis 2 :

Kesimpulan : Garis lurus AB selari dengan paksi-x.

(b) Premis 1 :

Premis 2 : 891 ialah gandaan 9.

Kesimpulan : 891 boleh dibahagi tepat dengan 3.

(c) Premis 1 : Jika poligon P ialah nonagon, maka poligon P mempunyai sembilan bucu.

Premis 2 :

Kesimpulan : Poligon P mempunyai sembilan bucu.

(d) Premis 1 :

Premis 2 : $x > 6$.

Kesimpulan : $x > 4$.

(e) Premis 1 : Jika hari ini hujan, maka suhu bilik adalah kurang daripada 19°C.

Premis 2 :

Kesimpulan : Hari ini tidak hujan.

(f) Premis 1 :

Premis 2 : $x \neq 8$.

Kesimpulan : $3x - 8 \neq 16$.

Bagaimanakah anda menentukan dan menjustifikasikan kekuatan suatu hujah induktif dan seterusnya menentukan sama ada hujah yang kuat itu meyakinkan?

Standard Pembelajaran

Menentukan dan menjustifikasikan kekuatan suatu hujah induktif dan seterusnya menentukan sama ada hujah yang kuat itu meyakinkan.

Hujah deduktif menekankan kesahan hujah manakala hujah induktif lebih menekankan kekuatan hujah. Kekuatan hujah induktif ditentukan daripada tahap kemungkinan kesimpulan itu benar dengan andaian bahawa semua premis adalah benar. Sesuatu hujah itu meyakinkan atau tidak perlu dibincangkan berdasarkan kebenaran premis dan kesimpulannya.

Contoh 21

Tentukan sama ada hujah yang diberi kuat atau lemah. Seterusnya, tentukan sama ada hujah yang kuat itu meyakinkan atau tidak meyakinkan dan berikan justifikasi anda.

(a) Premis 1 : Kerusi di ruang tamu adalah merah.
Premis 2 : Kerusi di ruang makan adalah merah.
Premis 3 : Kerusi di bilik bacaan adalah merah.
Premis 4 : Kerusi di bilik tidur adalah merah.
Kesimpulan : Semua kerusi di rumah adalah merah.

(b) Premis 1 : 27 ialah gandaan 3.
Premis 2 : 81 ialah gandaan 3.
Kesimpulan : Semua gandaan 9 ialah gandaan 3.

(c) Premis 1 : Ikan kembung bernafas dengan insang.
Premis 2 : Ikan yu bernafas dengan insang.
Kesimpulan : Semua ikan bernafas dengan insang.

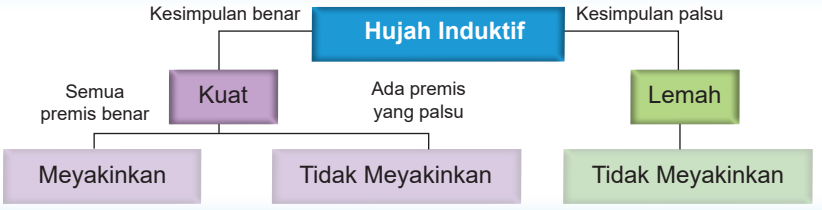
(d) Premis 1 : $11 \times 5 = 55$
Premis 2 : $12 \times 5 = 60$
Kesimpulan : Semua gandaan 5 berakhir dengan digit 0 atau 5.

(e) Premis 1 : 1 ialah nombor perdana.
Premis 2 : 2 ialah nombor perdana.
Premis 3 : 3 ialah nombor perdana.
Premis 4 : 5 ialah nombor perdana.
Kesimpulan : Semua nombor perdana boleh dibahagi tepat dengan 1 dan dirinya sendiri sahaja.

Penyelesaian:

(a) Hujah ini lemah dan tidak meyakinkan kerana premis adalah benar tetapi kesimpulan mungkin palsu.
(b) Hujah ini kuat dan meyakinkan kerana semua premis dan kesimpulan benar.
(c) Hujah ini lemah dan tidak meyakinkan kerana premis adalah benar tetapi kesimpulan adalah palsu.
(d) Hujah ini kuat dan meyakinkan kerana kesemua premis dan kesimpulan adalah benar.
(e) Hujah ini kuat tetapi tidak meyakinkan kerana premis 1 adalah palsu.

Daripada contoh 21, didapati bahawa bilangan premis tidak menjamin hujah yang kuat kerana kekuatan suatu hujah bergantung pada nilai kebenaran kesimpulan. Hujah yang lemah adalah tidak meyakinkan, manakala hujah yang kuat hanya akan meyakinkan sekiranya semua premisnya benar.



Praktis Kendiri 3.2d

Tentukan sama ada hujah yang diberikan kuat atau lemah serta meyakinkan atau tidak meyakinkan. Berikan justifikasi anda.

1. Premis 1 : Meja diperbuat daripada kayu.
Premis 2 : Kerusi diperbuat daripada kayu.
Premis 3 : Almari diperbuat daripada kayu.
Kesimpulan: Semua perabot diperbuat daripada kayu.

2. Premis 1 : $(k^5)^2 = k^{10}$
Premis 2 : $(k^8)^2 = k^{16}$
Kesimpulan: $(k^m)^n = k^{mn}$

3. Premis 1 : 2^3 boleh dibahagi tepat dengan 4.
Premis 2 : 2^5 boleh dibahagi tepat dengan 4.
Kesimpulan: 2^n boleh dibahagi tepat dengan 4.

4. Premis 1 : $2 \times 5 = 10$
Premis 2 : $4 \times 5 = 20$
Premis 3 : $6 \times 5 = 30$
Kesimpulan: Hasil darab gandaan 2 dan 5 berakhir dengan digit 0.

5. Premis 1 : 24 ialah gandaan 6.
Premis 2 : 36 ialah gandaan 6.
Premis 3 : 40 ialah gandaan 6.
Kesimpulan: Semua gandaan 6 ialah nombor genap.

6. Premis 1 : Tikus mempunyai 4 kaki.
Premis 2 : Kucing mempunyai 4 kaki.
Premis 3 : Kuda mempunyai 4 kaki.
Kesimpulan: Semua haiwan mempunyai 4 kaki.

Bagaimanakah anda membentuk hujah induktif yang kuat bagi suatu situasi?

Standard Pembelajaran
Membentuk hujah induktif yang kuat bagi suatu situasi

Hujah induktif yang kuat dan meyakinkan bergantung pada premis dan kesimpulan yang benar. Premis yang diberikan merupakan bukti atau sokongan kepada kesimpulan yang akan dibuat. Penaakulan induktif boleh dijalankan mengikut langkah-langkah berikut.

Teliti beberapa contoh atau situasi yang khusus. → Perhatikan ciri yang sepunya. → Buat satu kesimpulan umum.

Contoh 22

Bentuk satu kesimpulan induktif yang kuat bagi setiap pola nombor yang berikut.

(a) Pola $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

$$\frac{1}{1} = 1^{-1}$$
$$\frac{1}{2} = 2^{-1}$$
$$\frac{1}{3} = 3^{-1}$$
$$\frac{1}{4} = 4^{-1}$$
$$\vdots$$

(b) Pola 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625, …

$$0.5 = 0.5^1$$
$$0.25 = (0.5)^2$$
$$0.125 = (0.5)^3$$
$$0.0625 = (0.5)^4$$
$$\vdots$$

(c) Pola 1, 3, 5, 7, …

$$1 = 2(0) + 1$$
$$3 = 2(1) + 1$$
$$5 = 2(2) + 1$$
$$7 = 2(3) + 1$$
$$\vdots$$

(d) Pola 0, 9, 24, 45, …

$$0 = 3(1)^2 - 3$$
$$9 = 3(2)^2 - 3$$
$$24 = 3(3)^2 - 3$$
$$45 = 3(4)^2 - 3$$
$$\vdots$$

Penyelesaian:

(a) n^{-1}; $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

(b) $(0.5)^n$; $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

(c) $2n + 1$; $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

(d) $3n^2 - 3$; $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

Praktis Kendiri 3.2e

Bentuk satu kesimpulan induktif yang kuat bagi setiap pola nombor yang berikut.

1. Pola $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \ldots$

$$\frac{1}{3} = (3 \times 1)^{-1}$$
$$\frac{1}{6} = (3 \times 2)^{-1}$$
$$\frac{1}{9} = (3 \times 3)^{-1}$$
$$\frac{1}{12} = (3 \times 4)^{-1}$$
$$\vdots$$

2. Pola 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, …

$$0.2 = \frac{1}{5}$$
$$0.4 = \frac{2}{5}$$
$$0.6 = \frac{3}{5}$$
$$0.8 = \frac{4}{5}$$
$$\vdots$$

3. Pola 0, 3, 18, 57, …

$$0 = 2(0)$$
$$3 = 2(1) + 1$$
$$18 = 2(8) + 2$$
$$57 = 2(27) + 3$$
$$\vdots$$

4. Pola 19, 16, 4, –44, …

$$19 = 20 - 4^0$$
$$16 = 20 - 4^1$$
$$4 = 20 - 4^2$$
$$-44 = 20 - 4^3$$
$$\vdots$$

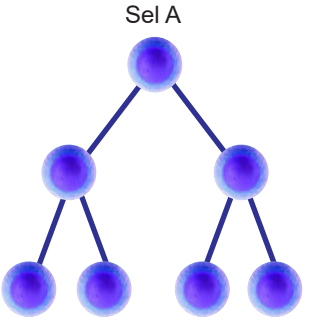
Bagaimanakah anda menyelesaikan masalah yang melibatkan penaakulan logik?

Standard Pembelajaran

Menyelesaikan masalah yang melibatkan penaakulan logik.

Contoh 23

Rajah di sebelah menunjukkan pertumbuhan sejenis sel bermula dengan sel A. Pada hari pertama, dua sel baharu dihasilkan. Setiap sel akan menghasilkan dua sel yang lain pada hari seterusnya. Diberi bilangan pertumbuhan sel ialah $P(t) = 2^t$, dengan keadaan t ialah bilangan hari.



(a) Berapakah bilangan sel baharu akan terhasil pada hari ke-8?

(b) Pada hari keberapakah bilangan sel baharu ialah 2 048?

Penyelesaian:

(a)

Memahami masalah

- Membina kesimpulan secara deduktif.
- Menghitung bilangan sel baharu pada hari ke-8.
- $t = 8$.
- Hitung $P(8)$

Merancang strategi

Gantikan t dengan 8 ke dalam $P(t) = 2^t$.

Melaksanakan strategi

$P(8) = 2^8$

$= 256$

Kesimpulan

$P(8) = 256$

256 sel baharu akan terhasil pada hari ke-8.

Semak Jawapan

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256

(b)

Memahami masalah

- Hitung hari keberapakah bilangan baharu ialah 2 048.
- Hitung t, dengan $P(t) = 2\,048$

Merancang strategi

Selesaikan $2^t = 2\,048$.

Melaksanakan strategi

$2^t = 2\,048$

$2^t = 2^{11}$

Kesimpulan

$t = 11$

Pada hari ke-11 bilangan sel baharu ialah 2 048.

Contoh 24

Jadual di bawah menunjukkan jumlah kereta mainan yang telah dihasilkan oleh Kilang TOY pada suatu pagi.

Masa	Jumlah kereta mainan
8:00 pagi	270
9:00 pagi	520
10:00 pagi	770
11:00 pagi	1 020

(a) Bina satu rumus yang umum bagi bilangan kereta mainan yang telah dihasilkan oleh Kilang TOY berdasarkan jadual di atas.

(b) Kilang TOY beroperasi dari pukul 7 pagi hingga pukul 10 malam 5 hari dalam seminggu.
(i) Berapakah kereta mainan dapat dihasilkan oleh Kilang TOY pada satu hari?
(ii) Kilang TOY menerima satu pesanan sebanyak 25 000 kereta mainan. Pesanan ini perlu disiapkan dalam masa seminggu. Adakah Kilang TOY dapat menyerahkan kereta mainan yang dipesan ini pada masa yang ditetapkan? Sekiranya tidak, cadangkan satu cara penyelesaian supaya Kilang TOY dapat menyiapkan pesanan ini.

Penyelesaian:

(a)

Memahami masalah

- Membina kesimpulan secara induktif.
- Membina rumus umum bagi bilangan kereta mainan.

Merancang strategi

Memperhatikan pola nombor yang dibentuk oleh kereta mainan yang dihasilkan.

Kesimpulan

Rumus yang umum bagi bilangan kereta mainan yang telah dihasilkan oleh Kilang TOY ialah $250n + 20$; $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$.

Melaksanakan strategi

$270 = 250 + 20$
$520 = 2\,(250) + 20$
$770 = 3\,(250) + 20$
$1\,020 = 4\,(250) + 20$
$\vdots$

Maka, bilangan kereta mainan yang dihasilkan boleh dirumuskan dengan
$250\,n + 20$; $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$.

(b) (i)

Memahami masalah

- Waktu beroperasi Kilang TOY ialah 15 jam sehari
- $n = 15$

Merancang strategi

Dengan rumus umum yang dibina di soalan (a), gantikan n dengan 15.

Melaksanakan strategi

$250\,(15) + 20 = 3\,770$

Kesimpulan

Kilang TOY menghasilkan 3 770 kereta mainan dalam satu hari.

(b) (ii)

Memahami masalah

- Kilang TOY perlu menghasilkan sekurang-kurangnya 25 000 kereta mainan dalam masa 5 hari
- Kilang TOY menghasilkan 3 770 kereta mainan dalam masa sehari

Merancang strategi

- Darabkan 3 770 dengan 5.
- Bandingkan hasil darab dengan 25 000 dan membuat kesimpulan.

Melaksanakan strategi

$3\,770 \times 5 = 18\,850\ (< 25\,000)$

Kesimpulan

Kilang TOY tidak dapat menyerahkan kereta mainan yang dipesan.
Cadangan: Kilang TOY memanjangkan waktu operasi kepada 20 jam sehari supaya dapat menghasilkan $250\,(20) + 20 = 5\,020$ kereta mainan.

Semak Jawapan

$5\,020 \times 5 = 25\,100$
$(> 25\,000)$

Praktis Kendiri 3.2f

1. Kadar bayaran letak kereta dalam Hotel Cahaya dihitung mengikut kadar berikut.

Masa	Bayaran
1 jam pertama atau sebahagian daripadanya	RM6.00
Setiap jam berikutnya hingga jam ke-6	RM5.00
Setiap jam yang seterusnya	RM3.00

Zamuddin meletakkan keretanya dari jam 0750 untuk menghadiri kursus di Hotel Cahaya. Selepas kursusnya, Zamuddin mengambil keretanya pada jam 1725. Hitung secara deduktif jumlah bayaran yang Zamuddin perlu bayar sebelum keluar dari tempat letak kereta.

2. Jumlah penduduk di Taman Gembira mengikut formula $g(t) = 250\,(t^2 + t + 100)$, dengan keadaan t ialah bilangan tahun.
Diberi jumlah penduduk di Taman Gembira pada 1 Januari 2012 ialah 25 000 orang.

(a) Buat kesimpulan secara deduktif mengenai jumlah penduduk Taman Gembira pada 31 Disember 2016.

(b) Pada tahun keberapakah penduduk Taman Gembira akan mencapai 77 500 orang?

3. Bilangan kelahiran bayi di sebuah negara pada tahun 2014 ialah 536 100. Bilangan kelahiran bayi dari tahun 2015 hingga tahun 2017 di negara tersebut membentuk satu pola seperti yang berikut.

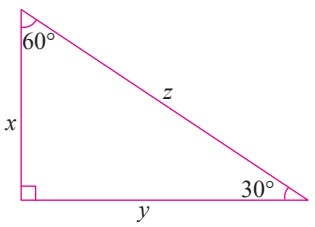
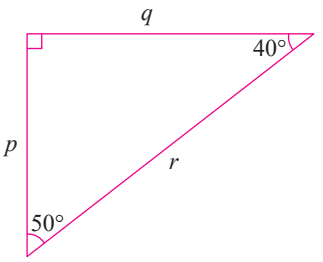
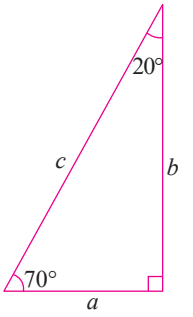
Tahun	Kelahiran bayi
2014	536 100
2015	521 100
2016	506 100
2017	491 100

(a) Bina rumus berdasarkan pola bilangan kelahiran bayi.

(b) Sekiranya bilangan kelahiran bayi dalam negara tersebut mengikut pola seperti di atas bagi 5 tahun yang seterusnya, anggarkan bilangan bayi yang dilahirkan pada tahun 2021.

4. Rajah berikut merupakan tiga segi tiga bersudut tegak.

(a) Lengkapkan jadual berikut.

		
sin 60° = kos 30° =	sin 40° = kos 50° =	sin 20° = kos 70° =

(b) Perhatikan hubungan antara sudut dengan nisbah fungsi sinus dan kosinus bagi setiap pasangan sudut di atas. Bina satu kesimpulan secara induktif bagi hubungan antara fungsi sin θ dengan fungsi kos (90° – θ).

(c) Diberi sin 80° = 0.9848, berdasarkan kesimpulan induktif daripada soalan (b) di atas, nyatakan nilai kos 10°.

Praktis Komprehensif

1. Tentukan sama ada ayat-ayat di bawah pernyataan atau bukan. Berikan justifikasi anda.

(a) Kuboid mempunyai enam permukaan.
(b) Selesaikan persamaan $x^3 = 3x^2 + 3x - 1$.
(c) Setiap silinder mempunyai dua permukaan melengkung.
(d) Jangan lupa bawa buku kerja esok.
(e) $3x + 5 = 6$.
(f) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.
(g) Amboi, cantiknya bunga ini!
(h) Ahli PDRM ialah pegawai kerajaan.
(i) $3 + 5 > 8$.

2. Tentukan sama ada pernyataan di bawah benar atau palsu. Sekiranya palsu, berikan satu contoh penyangkal.

(a) $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.
(b) Semua integer bernilai positif.
(c) Nombor pecahan adalah lebih kecil daripada satu.
(d) Semua pepenjuru adalah pembahagi dua sama serenjang.

3. Tentukan sama ada pernyataan majmuk berikut adalah benar atau palsu.
(a) $2^6 = 64$ dan $2 \times 6 = 26$.
(b) $9^{-1} = \frac{1}{9}$ dan 9 ialah faktor bagi 72.
(c) $\{2,5\} \subset \{2,3,6\} \cup \{5,7\}$ atau $n(\phi) = 0$.
(d) $90 \times 80\% = 70$ atau $8 \times 8 \times 8 = 324$.

4. Tulis satu pernyataan yang benar dengan menggunakan pengkuantiti "semua" atau "sebilangan" bagi objek dan ciri-ciri yang berikut:

	Objek	Ciri-ciri
(a)	Heksagon	Mempunyai enam bucu.
(b)	Bulatan	Mempunyai jejari 18 cm.
(c)	Segi tiga	Mempunyai tiga paksi simetri.

5. (a) Tentukan antejadian dan akibat daripada pernyataan-pernyataan berikut:
(i) Jika $p < q$, maka $q - p > 0$.
(ii) Jika perimeter segi empat tepat A ialah $2(x + y)$, maka luas segi empat tepat A ialah xy.
(b) Bina satu implikasi yang sesuai berdasarkan setiap pasangan implikasi berikut:
(i) Jika x ialah gandaan 10, maka x ialah gandaan 5.
Jika x ialah gandaan 5, maka x ialah gandaan 10.
(ii) Jika 6 ialah faktor bagi 12, maka 6 ialah faktor bagi 24.
Jika 6 ialah faktor bagi 24, maka 6 ialah faktor bagi 12.
(c) Bina dua implikasi yang sesuai bagi setiap implikasi berikut:
(i) 20% daripada 30 ialah 6 jika dan hanya jika $0.2 \times 30 = 6$.
(ii) M boleh dibahagi tepat dengan 20 jika dan hanya jika M boleh dibahagi tepat dengan 2 dan 10.

6. Tulis pernyataan yang diminta dalam kurungan bagi setiap yang berikut dan tentukan nilai kebenaran bagi pernyataan yang ditulis. Sekiranya palsu, berikan justifikasi anda.
(a) Jika α dan β adalah dua sudut pelengkap, maka $\alpha + \beta = 90°$. (Akas)
(b) Jika $w > 20$, maka $w > 30$. (Kontrapositif)
(c) Jika $p > 0$, maka $p^2 > 0$. (Songsangan)
(d) Poligon mempunyai hasil tambah sudut peluaran 360°. (Penafian)

7. Lengkapkan hujah berikut untuk membentuk hujah deduktif yang sah dan munasabah.
(a) Premis 1 : Semua faktor bagi 4 ialah faktor bagi 8.
Premis 2 : 2 ialah faktor bagi 4.
Kesimpulan : _____
(b) Premis 1 : Jika $x = 5$, maka $2x + 8 = 18$.
Premis 2 : _____
Kesimpulan : $2x + 8 = 18$.
(c) Premis 1 : _____
Premis 2 : $\sin^2 \alpha + \text{kos}^2 \beta \neq 1$.
Kesimpulan : $\alpha \neq \beta$.

(d) Premis 1 : Jika p boleh dibahagi tepat dengan 18, maka p ialah gandaan bagi 18.
Premis 2 : 54 boleh dibahagi tepat dengan 18.
Kesimpulan :

(e) Premis 1 : Jika $-4m < 0$, maka $m > 0$.
Premis 2 :
Kesimpulan : $-4m \geqslant 0$.

(f) Premis 1 : Semua fungsi kuadratik mempunyai titik pusingan.
Premis 2 :
Kesimpulan : Fungsi $g(x)$ mempunyai titik pusingan.

8. (a) Diberi luas permukaan sebuah kon = $\pi j(j + s)$. Bina satu kesimpulan secara deduktif bagi luas permukaan lima kon yang sama dengan keadaan $j = 7$ cm dan $s = 13$ cm.

(b) Diberi persamaan garis lurus ialah $y = mx + c$. Bina satu kesimpulan secara deduktif bagi persamaan garis lurus PQ dengan keadaan $m = 3$ dan $c = 5$.

9. Bina satu kesimpulan secara induktif kepada pola nombor berikut.

(a) $-4, -1, 4, 11, \ldots$
$-4 = 1^2 - 5$
$-1 = 2^2 - 5$
$4 = 3^2 - 5$
$11 = 4^2 - 5$
$\vdots$

(b) $4, 5, 7, 11, \ldots$
$4 = 2^0 + 3$
$5 = 2^1 + 3$
$7 = 2^2 + 3$
$11 = 2^3 + 3$
$\vdots$

(c) $5, 12, 21, 32, \ldots$
$5 = 4(1) + 1$
$12 = 4(2) + 4$
$21 = 4(3) + 9$
$32 = 4(4) + 16$
$\vdots$

(d) $3, 8, 17, 30, \ldots$
$3 = 3(1) + 2(0)^2$
$8 = 3(2) + 2(1)^2$
$17 = 3(3) + 2(2)^2$
$30 = 3(4) + 2(3)^2$
$\vdots$

10. Tentukan sama ada hujah berikut ialah hujah induktif atau hujah deduktif.

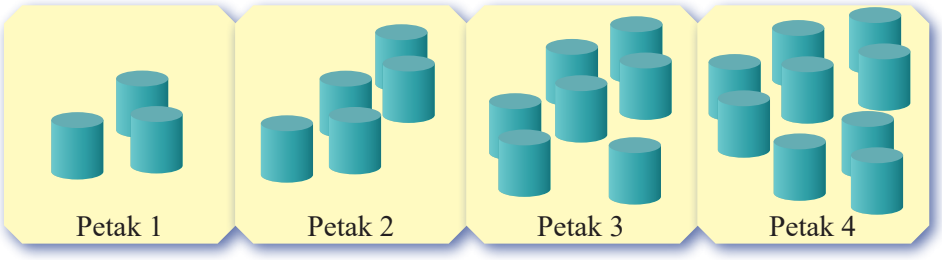
(a)

Semua murid 4 Bahagia membuat persembahan pada hari guru. Jayanthi murid 4 Bahagia. Maka, Jayanthi membuat persembahan pada hari guru.

(b)

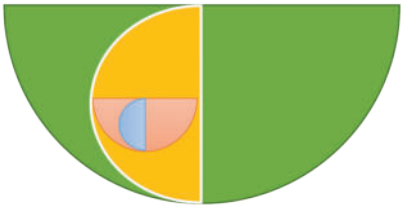
Hasil tambah 1 dan 3 ialah nombor genap.
Hasil tambah 3 dan 5 ialah nombor genap.
Hasil tambah 5 dan 7 ialah nombor genap.
Hasil tambah 7 dan 9 ialah nombor genap.
Kesimpulannya, hasil tambah dua nombor ganjil ialah nombor genap.

11. Rajah di bawah menunjukkan susunan silinder yang sama saiz dalam petak mengikut nombor pola 3, 5, 7, 9, …



(a) Bina satu kesimpulan secara induktif bagi pola bilangan silinder di atas.
(b) Sekiranya jejari dan tinggi bagi setiap silinder ialah 14 cm dan 10 cm masing-masing, hitung jumlah isi padu silinder pada petak 8.

12. Rajah di sebelah menunujukkan empat semi bulatan yang pertama disusun mengikut pola tertentu. Jejari semi bulatan yang terbesar ialah 32 cm.



(a) Hitung dan senaraikan perimeter-perimeter bagi empat semi bulatan ini, dalam sebutan π.
(b) Berdasarkan dapatan daripada (a), tunjukkan pola perimeter bagi empat semi bulatan ini ialah $2^{6-n}(\pi + 2)$; $n = 1, 2, 3, 4$.
(c) Hitung perimeter, dalam cm, bagi semi bulatan yang ke-8.

PROJEK

Peningkatan paras laut ialah satu isu yang kritikal bagi seluruh dunia sekarang. Peningkatan paras laut berkait rapat dengan perubahan suhu di permukaan bumi. Diberi keseimbangan paras laut dengan suhu dihubungkan dengan rumus iaitu

$$L = T(0.54T^2 + 0.39T + 7.7)$$

L ialah perubahan paras laut dan T ialah perubahan suhu.

Buat satu folio mengenai peningkatan paras laut dan perubahan suhu bagi lima tahun terkini. Folio anda perlu mengandungi

1. Muka hadapan
2. Isi kandungan
   (a) Pengenalan kepada isu peningkatan paras laut.
   (b) Kesimpulan secara deduktif mengenai perubahan paras laut bagi lima tahun terkini.
   (c) Faktor-faktor yang mengakibatkan peningkatan paras laut.
   (d) Kesan aktiviti manusia terhadap peningkatan paras laut.
   (e) Langkah-langkah untuk mengatasi peningkatan paras laut.
3. Kesimpulan.

PETA KONSEP

Penaakulan Logik

Pernyataan
Benar atau Palsu

Penafian
"Tidak" atau "Bukan"

Contoh:
12 ialah gandaan 5.
Penafian: 12 bukan gandaan 5.

Pernyataan Majmuk
"atau" atau "dan"

Contoh:
p: 12 ialah gandaan 5.
q: 12 ialah gandaan 6.
- 12 ialah gandaan 5 atau gandaan 6.
- 12 ialah gandaan 5 dan gandaan 6.

Implikasi
"Jika p, maka q"
"p jika dan hanya jika q"

Contoh:
p: 12 ialah gandaan 3.
q: 12 ialah gandaan 6.
- Jika 12 ialah gandaan 3, maka 12 ialah gandaan 6.
- 12 ialah gandaan 3 jika dan hanya jika 12 ialah gandaan 6.

Akas: "Jika q, maka p"
Songsangan: "Jika $\sim p$, maka $\sim q$"
Kontrapositif: "Jika $\sim q$, maka $\sim p$"

Contoh:
Jika 12 ialah gandaan 3, maka 12 ialah gandaan 6.
Akas: Jika 12 ialah gandaan 6, maka 12 ialah gandaan 3.
Songsangan: Jika 12 bukan gandaan 3, maka 12 bukan gandaan 6.
Kontrapositif: Jika 12 bukan gandaan 6, maka 12 bukan gandaan 3.

Hujah

Hujah Induktif
Kuat dan Meyakinkan

Kesimpulan umum dibina berdasarkan kes-kes khusus.

Contoh:
Premis 1: $2(1) - 1 = 1$
Premis 2: $2(2) - 1 = 3$
Premis 3: $2(3) - 1 = 5$
Premis 4: $2(4) - 1 = 7$
Kesimpulan:
$2n - 1$; $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

Hujah Deduktif
Sah dan Munasabah

Kesimpulan khusus dibina berdasarkan premis umum

Premis 1: Semua A ialah B.
Premis 2: C ialah A.
Kesimpulan: C ialah B.

Contoh:
Premis 1: Semua gandaan 6 ialah gandaan 3.
Premis 2: 18 ialah gandaan 6.
Kesimpulan: 18 ialah gandaan 3.

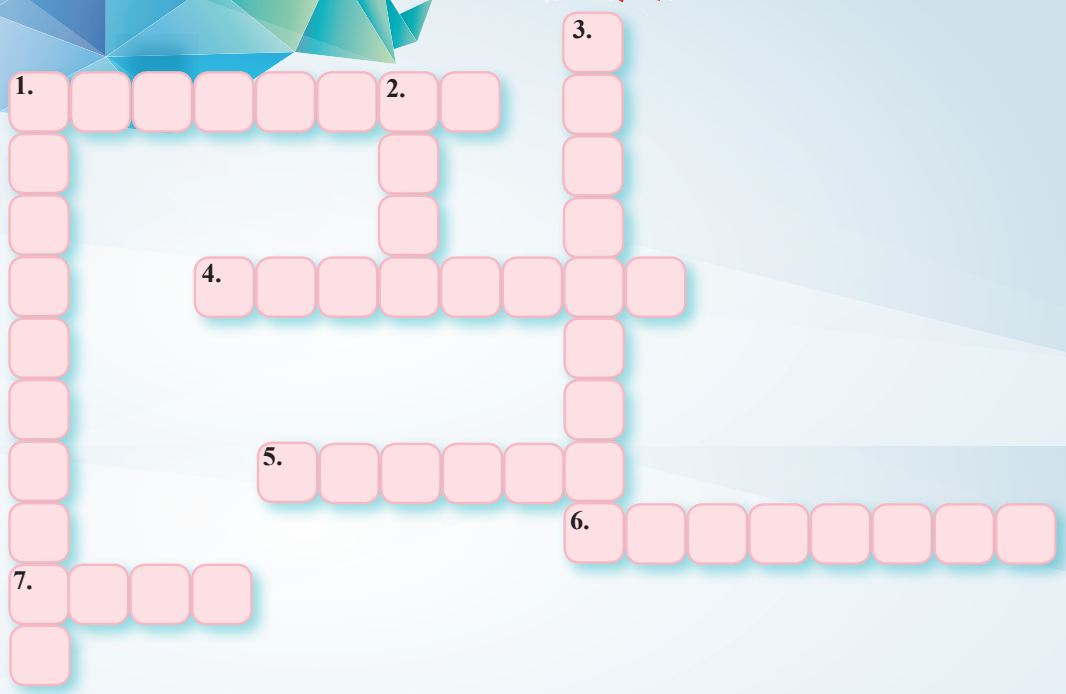
Premis 1: Jika p, maka q.
Premis 2: p benar.
Kesimpulan: q benar.

Contoh:
Premis 1: Jika x ialah gandaan 6, maka x ialah gandaan 3.
Premis 2: 18 ialah gandaan 6.
Kesimpulan: 18 ialah gandaan 3.

Premis 1: Jika p, maka q.
Premis 2: Bukan q adalah benar.
Kesimpulan: Bukan p adalah benar.

Contoh:
Premis 1: Jika x ialah gandaan 6, maka x ialah gandaan 3.
Premis 2: 17 bukan gandaan 3.
Kesimpulan: 17 bukan gandaan 6.

Refleksi Kendiri



Melintang

1. ☐ pernyataan p ditulis sebagai $\sim p$.

4. Premis 1: Semua gandaan 6 ialah gandaan 2 dan gandaan 3.
Premis 2: 18 ialah gandaan 6.
Kesimpulan: 18 ialah gandaan 2 dan gandaan 3.
Hujah ☐ di atas ialah yang sah dan munasabah.

5. Hujah yang ringkas terdiri daripada dua atau lebih ☐ dalam satu kesimpulan.

6. Hujah ☐ merupakan kesimpulan umum dibuat berdasarkan kes-kes yang khusus.

7. ☐ dan songsangan mempunyai nilai kebenaran yang sama.

Menegak

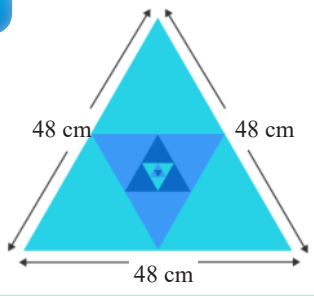
1. Ayat yang dapat ditentukan nilai kebenaran dikenali sebagai ☐.

2. Bina satu pernyataan majmuk yang benar bagi pernyataan berikut:
91 ialah gandaan 9 ☐ 81 ialah gandaan 9.

3. Songsangan bagi ☐ "jika p, maka q" ialah "jika $\sim p$, maka $\sim q$."

Eksplorasi Matematik

Rajah di sebelah menunjukkan sebuah segi tiga sama sisi dengan panjang sisi 48 cm. Titik tengah setiap sisi disambung untuk membentuk satu segi tiga sama yang lain. Proses ini berulang tak terhingga.



Hitung jumlah perimeter semua segi tiga sama sisi yang tak terhingga ini.

Operasi Set

Anda akan mempelajari

- Persilangan Set
- Kesatuan Set
- Gabungan Operasi Set

Sektor pertanian adalah antara sektor yang menyumbang kepada pendapatan negara Malaysia. Penggunaan teknologi tinggi dan moden dalam bidang pertanian mampu membantu meningkatkan hasil pertanian malah akan menarik minat generasi baharu untuk menceburi bidang ini pada masa akan datang.

Tahukah anda apakah sektor-sektor ekonomi lain yang menjadi penyumbang utama kepada pendapatan negara?

Maslahat Bab

Operasi set digunakan untuk mewakili, mengumpul dan mengkaji data yang serupa dalam kehidupan harian. Ilmu ini menjadi asas kepada bidang yang memerlukan analisis seperti pengaturcaraan, statistik, ekonomi, pasaran saham dan sebagainya.

JARINGAN KATA

• kesatuan	• *union*
• persilangan	• *intersection*
• pelengkap	• *complement*
• set	• *set*
• set kosong	• *empty set*
• subset	• *subset*
• tatatanda set	• *set notation*
• unsur	• *element*

Imbasan Silam

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor
(1845-1918)

Georg Cantor ialah seorang ahli matematik Jerman yang mencipta teori set. Beliau juga memperkenalkan nombor ordinal, nombor kardinal dan aritmetik set tak terhingga.

http://yakin-pelajar.com/Cantor/4.pdf

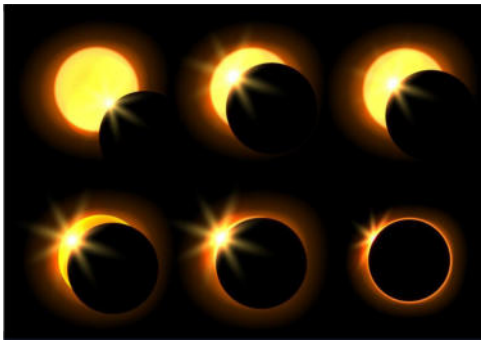
4.1 Persilangan Set

Bagaimanakah anda menentukan dan menghuraikan persilangan set dengan menggunakan pelbagai perwakilan?

Standard Pembelajaran

Menentukan dan menghuraikan persilangan set menggunakan pelbagai perwakilan.

Persilangan set wujud apabila terdapat lebih daripada satu set. Persilangan set P dan set Q ditulis menggunakan simbol $\cap$. $P \cap Q$ ialah set yang mengandungi unsur-unsur sepunya bagi kedua-dua set P dan set Q.



Gerhana matahari berlaku apabila bulan berada di antara matahari dengan bumi pada satu garis lurus. Persilangan antara bulan dengan matahari dapat dilihat apabila bahagian bulan dan matahari berada pada kedudukan yang sama.

Rangsangan Minda 1

Tujuan: Menentukan dan menghuraikan persilangan set menggunakan pelbagai perwakilan.

Jadual di bawah menunjukkan sekumpulan murid yang suka makan buah-buahan tempatan.

Nabil suka makan durian.
Hani suka makan durian.
Navin suka makan rambutan.
Yan Kit suka makan durian.
Raj suka makan durian dan rambutan.
Mei Yee suka makan durian.

Afiq suka makan durian dan rambutan.
Amirul suka makan rambutan.
Meena suka makan durian.
Benjamin suka makan rambutan dan durian.
Jenny suka makan durian.
Khairi suka makan rambutan.

Langkah:

1. Berdasarkan jadual di atas, tulis nama murid menggunakan tatatanda set.

A = {murid yang suka makan durian}

A = {Nabil, Hani, Yan Kit, Raj, Mei Yee, Afiq, Meena, Benjamin, Jenny}

B = {murid yang suka makan rambutan}

B = { , , , , , }

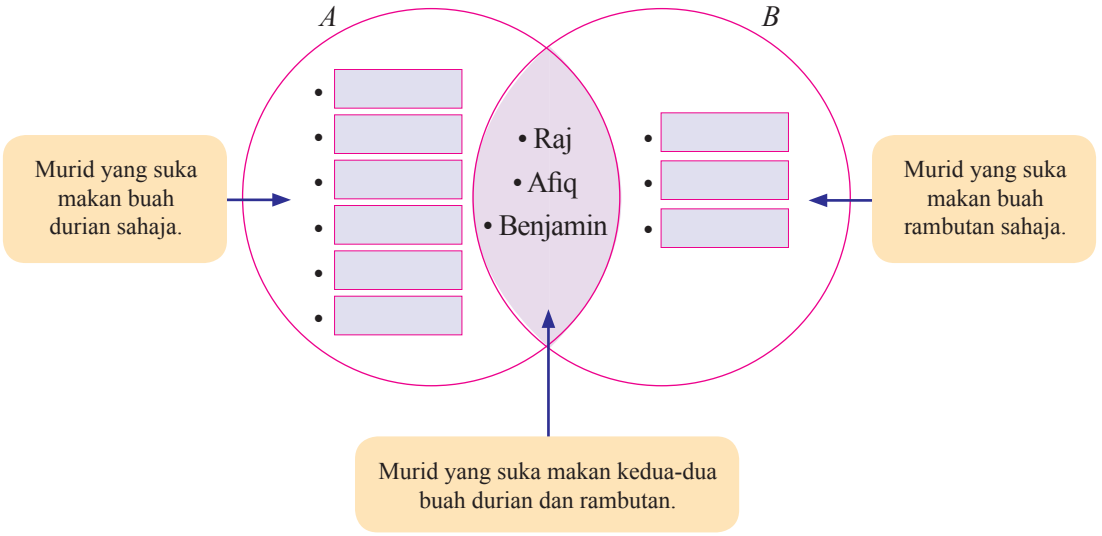
$A \cap B$ = {murid yang suka makan kedua-dua buah durian dan rambutan}

$A \cap B$ = { , , }

2. Lengkapkan jadual di bawah dengan nama murid yang suka makan durian sahaja, rambutan sahaja dan kedua-dua buah durian dan rambutan.

Nama murid yang suka makan buah durian sahaja	Nama murid yang suka makan buah rambutan sahaja	Nama murid yang suka makan kedua-dua buah durian dan rambutan
• Nabil • Hani • Yan Kit • Mei Yee • Meena • Jenny	• Navin • ☐ • ☐	• Raj • Afiq • Benjamin

3. Lengkapkan gambar rajah Venn dengan maklumat di atas.



Perbincangan:

Bagaimanakah anda dapat menentukan persilangan set berdasarkan aktiviti di atas?

Hasil daripada Rangsangan Minda 1, didapati bahawa;

Persilangan set *A* dan set *B* mempunyai unsur-unsur sepunya iaitu Raj, Afiq dan Benjamin yang suka makan durian dan rambutan.

Contoh 1

Diberi set semesta, $\xi = \{x : x \text{ ialah integer}, 1 \leqslant x \leqslant 10\}$, set $P = \{x : x \text{ ialah nombor ganjil}\}$, set $Q = \{x : x \text{ ialah nombor perdana}\}$, dan set $R = \{x : x \text{ ialah gandaan 3}\}$.

(a) Senaraikan semua unsur bagi persilangan set yang berikut.

(i) $P \cap Q$ (ii) $P \cap R$ (iii) $Q \cap R$ (iv) $P \cap Q \cap R$

(b) Nyatakan bilangan unsur bagi set yang berikut.

(i) $n(P \cap Q)$ (ii) $n(P \cap R)$ (iii) $n(Q \cap R)$ (iv) $n(P \cap Q \cap R)$

Penyelesaian:

(a) (i) $P \cap Q$

$P = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$Q = \{2, 3, 5, 7\}$

$P \cap Q = \{3, 5, 7\}$

(ii) $P \cap R$

$P = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$R = \{3, 6, 9\}$

$P \cap R = \{3, 9\}$

(iii) $Q \cap R$

$Q = \{2, 3, 5, 7\}$

$R = \{3, 6, 9\}$

$Q \cap R = \{3\}$

(iv) $P \cap Q \cap R$

$P = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$Q = \{2, 3, 5, 7\}$

$R = \{3, 6, 9\}$

$P \cap Q \cap R = \{3\}$

(b) (i) $P \cap Q = \{3, 5, 7\}$

$n(P \cap Q) = 3$

(ii) $P \cap R = \{3, 9\}$

$n(P \cap R) = 2$

(iii) $Q \cap R = \{3\}$

$n(Q \cap R) = 1$

(iv) $P \cap Q \cap R = \{3\}$

$n(P \cap Q \cap R) = 1$

MEMORI SAYA

$B \subset A$

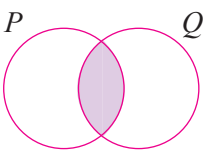
Set B ialah subset kepada set A apabila semua unsur set B terdapat dalam set A.

ZON INFORMASI

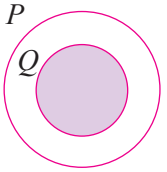
Simbol $\subseteq$ juga boleh digunakan sebagai subset.

Bagaimanakah anda menentukan persilangan antara dua atau lebih set dengan gambar rajah Venn?

Persilangan antara dua atau lebih set boleh diwakilkan oleh kawasan berlorek seperti dalam gambar rajah Venn di bawah.

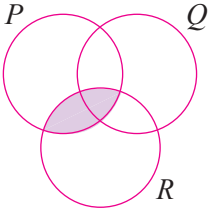


$P \cap Q$

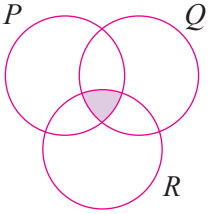


$P \cap Q = Q$

$(P \cap Q) \subset P$



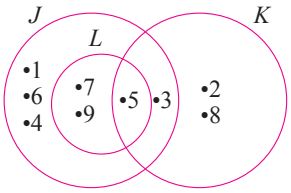
$P \cap R$



$P \cap Q \cap R$

Contoh 2

Gambar rajah Venn menunjukkan set J, set K dan set L dengan keadaan set semesta, $\xi = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.



Senaraikan semua unsur bagi persilangan set yang berikut.

(a) $J \cap K$ (b) $J \cap L$ (c) $K \cap L$ (d) $J \cap K \cap L$

Penyelesaian:

(a) $J \cap K = \{3, 5\}$

(b) $J \cap L = \{5, 7, 9\}$

(c) $K \cap L = \{5\}$

(d) $J \cap K \cap L = \{5\}$

MEMORI SAYA

Set kosong ialah set yang tidak mengandungi sebarang unsur dan boleh diwakili oleh simbol ϕ atau $\{\ \}$.

Contoh 3

Diberi set A = {nombor dalam dadu}, set B = {nombor genap dalam dadu} dan set $C = \{7, 8, 9\}$.

(a) Senaraikan semua unsur bagi persilangan set yang berikut.

(i) $A \cap B$ (ii) $B \cap C$ (iii) $A \cap C$

(b) Lukis gambar rajah Venn yang mewakili set A, set B, set C dan lorekkan kawasan yang mewakili persilangan set yang berikut.

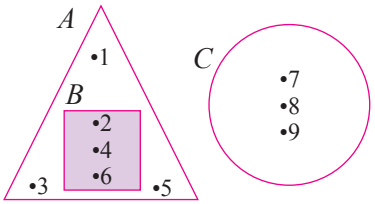
(i) $A \cap B$ (ii) $B \cap C$

Penyelesaian:

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$B = \{2, 4, 6\}$
$C = \{7, 8, 9\}$

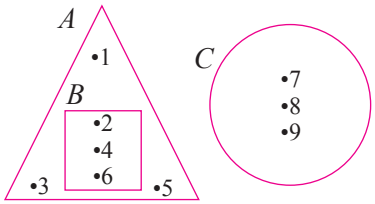
(i) $A \cap B = \{2, 4, 6\}$
(ii) $B \cap C = \{\ \}$
(iii) $A \cap C = \phi$

(b) (i)



Semua unsur set B terdapat dalam set A.
$A \cap B = B$

(ii)



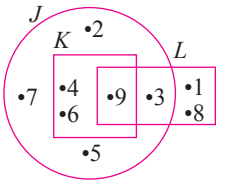
Set B dan set C tidak mempunyai unsur sepunya.

Praktis Kendiri 4.1a

1. Diberi $\xi = \{x : x$ ialah integer, $1 \leqslant x \leqslant 10\}$, set $M = \{x : x$ ialah nombor ganjil$\}$ dan set $N = \{x : x$ ialah gandaan 3$\}$. Senaraikan semua unsur bagi set yang berikut.

(a) set M (b) set N (c) $M \cap N$

2. Gambar rajah Venn menunjukkan set J, set K dan set L dengan keadaan set semesta, $\xi = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Senaraikan semua unsur bagi persilangan set yang berikut.



(a) $J \cap K$ (b) $J \cap L$ (c) $K \cap L$ (d) $J \cap K \cap L$

3. Diberi set semesta, $\xi = \{x : x \text{ ialah integer, } 1 \leqslant x \leqslant 20\}$, set $P = \{x : x \text{ ialah nombor perdana}\}$, set $Q = \{x : x \text{ ialah gandaan 5}\}$ dan set $R = \{x : x \text{ ialah faktor bagi 10}\}$,

(a) Lukis gambar rajah Venn mewakilkan semua set yang diberikan.

(b) Berdasarkan gambar rajah di (a) lorekkan kawasan mewakili set $P \cap Q \cap R$.

4. Diberi, set $A = \{x : x \text{ ialah huruf dalam perkataan "GIGIH"}\}$, set $B = \{x : x \text{ ialah huruf dalam perkataan "DEDIKASI"}\}$, dan set $C = \{x : x \text{ ialah huruf dalam perkataan "JUJUR"}\}$, nyatakan bilangan unsur dengan menyenaraikan semua unsur bagi persilangan set yang berikut.

(a) $n(A \cap B)$ (b) $n(A \cap C)$ (c) $n(B \cap C)$ (d) $n(A \cap B \cap C)$

BAB 4

Bagaimanakah anda menentukan pelengkap bagi persilangan set?

Standard Pembelajaran

Menentukan pelengkap bagi persilangan set.

Pelengkap bagi persilangan set ditulis menggunakan tanda " ′ ". $(A \cap B)'$ dibaca sebagai "pelengkap bagi persilangan set A dan set B". Pelengkap bagi persilangan set A dan set B bermaksud semua unsur yang bukan dalam persilangan set A dan set B.

Contoh 4

Diberi set semesta, $\xi = \{x : x \text{ ialah integer, } 1 \leqslant x \leqslant 8\}$, set $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, set $B = \{2, 4, 6\}$, dan set $C = \{1, 2, 3, 4\}$, senaraikan semua unsur dan nyatakan bilangan unsur bagi set yang berikut.

(a) $(A \cap B)'$ (b) $(A \cap C)'$ (c) $(A \cap B \cap C)'$

Penyelesaian:

$\xi = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

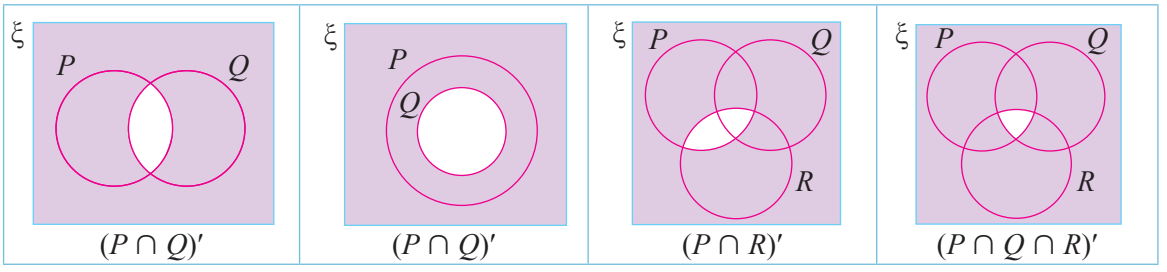
(a) $A \cap B = \{2, 4, 6\}$
$(A \cap B)' = \{1, 3, 5, 7, 8\}$
$n(A \cap B)' = 5$

(b) $A \cap C = \{1, 2, 3, 4\}$
$(A \cap C)' = \{5, 6, 7, 8\}$
$n(A \cap C)' = 4$

(c) $A \cap B \cap C = \{2, 4\}$
$(A \cap B \cap C)' = \{1, 3, 5, 6, 7, 8\}$
$n(A \cap B \cap C)' = 6$

Bagaimanakah anda menentukan pelengkap bagi persilangan antara dua atau lebih set dengan gambar rajah Venn?

Pelengkap bagi persilangan antara dua atau lebih set boleh diwakili oleh rantau berlorek seperti dalam gambar rajah Venn di bawah.



Contoh 5

Diberi aktiviti kokurikulum yang disertai oleh tiga orang murid seperti dalam set P, set Q dan set R dengan keadaan set semesta, ξ = {Pengakap, Matematik, Hoki, Bola Sepak, Sejarah, Badminton, Kadet Polis}.

P = {Pengakap, Matematik, Hoki}
Q = {Kadet Polis, Sejarah, Badminton}
R = {Pengakap, Sejarah, Bola Sepak}

(a) Senaraikan semua unsur bagi set yang berikut.
(i) $(P \cap R)'$ (ii) $(R \cap Q)'$ (iii) $(P \cap Q \cap R)'$

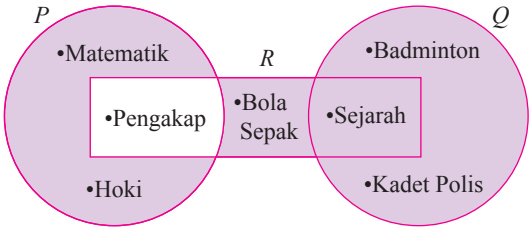
(b) Lukis gambar rajah Venn yang mewakili set P, set Q dan set R dan lorekkan kawasan yang mewakili pelengkap bagi persilangan set yang berikut.
(i) $(P \cap R)'$ (ii) $(R \cap Q)'$ (iii) $(P \cap Q \cap R)'$

Penyelesaian:

ξ = {Pengakap, Matematik, Hoki, Bola Sepak, Sejarah, Badminton, Kadet Polis}.

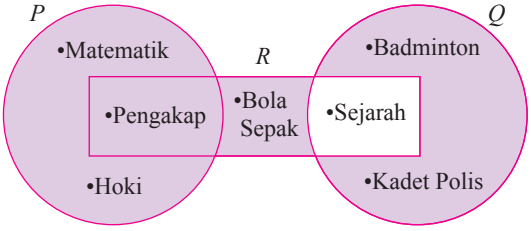
(a) (i) $P \cap R$ = {Pengakap}
$(P \cap R)'$ = {Matematik, Hoki, Bola Sepak, Sejarah, Badminton, Kadet Polis}

(b) (i)



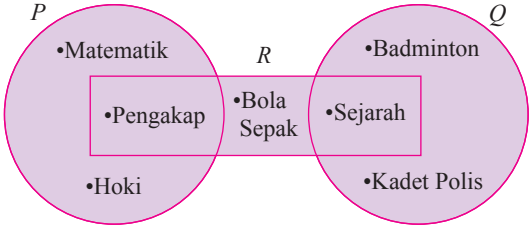
(a) (ii) $R \cap Q$ = {Sejarah}
$(R \cap Q)'$ = {Pengakap, Matematik, Hoki, Bola Sepak, Badminton, Kadet Polis}

(b) (ii)



(a) (iii) $P \cap Q \cap R$ = { }
$(P \cap Q \cap R)'$ = {Pengakap, Matematik, Hoki, Bola Sepak, Sejarah, Badminton, Kadet Polis}

(b) (iii)

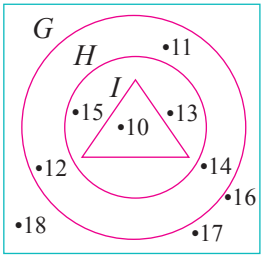


Praktis Kendiri 4.1b

1. Diberi set semesta, $\xi = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, set $P = \{3, 5, 7, 9\}$, set $Q = \{2, 3, 5, 7\}$ dan set $R = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, senaraikan semua unsur bagi set yang berikut.

(a) $(P \cap Q)'$ (b) $(Q \cap R)'$ (c) $(P \cap Q \cap R)'$

2. Gambar rajah Venn menunjukkan set G, set H, set I dan set semesta, ξ. Senaraikan semua unsur bagi set yang berikut.



(a) $(G \cap H)'$

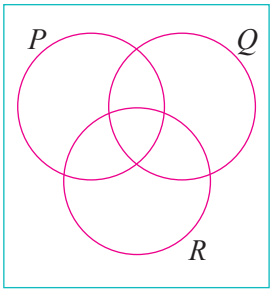
(b) $(G \cap I)'$

(c) $(H \cap I)'$

(d) $(G \cap H \cap I)'$

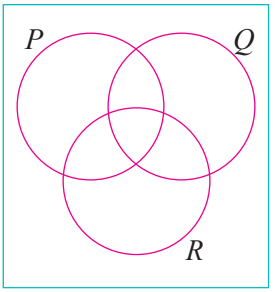
3. Lorekkan kawasan yang mewakili pelengkap bagi persilangan set yang diberikan.

(a) ξ



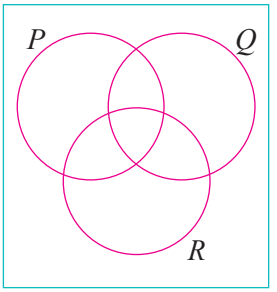
$(P \cap Q)'$

(b) ξ



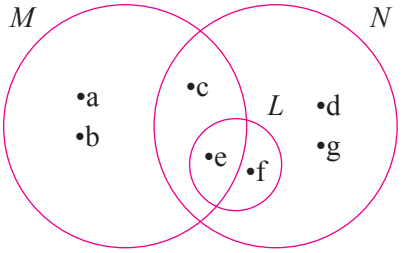
$(P \cap R)'$

(c) ξ



$(P \cap Q \cap R)'$

4. Gambar rajah Venn menunjukkan set L, set M, set N dan set semesta, $\xi = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.



Senaraikan semua unsur bagi set yang berikut.

(a) $(M \cap L)'$

(b) $(N \cap L)'$

(c) $(M \cap N)'$

(d) $(L \cap M \cap N)'$

Bagaimanakah anda menyelesaikan masalah yang melibatkan persilangan set?

Standard Pembelajaran

Menyelesaikan masalah yang melibatkan persilangan set.

Contoh 6

Sebanyak 140 orang murid tingkatan lima diberi peluang untuk menyertai kelas intensif untuk mata pelajaran Sejarah dan Bahasa Melayu.
Sebanyak 65 orang murid memilih kelas Bahasa Melayu, 70 orang murid memilih kelas Sejarah manakala 50 orang murid memilih kelas Bahasa Melayu dan Sejarah. Hitung

(a) jumlah murid yang dapat menyertai kelas intensif.

(b) jumlah murid yang tidak menyertai sebarang kelas.

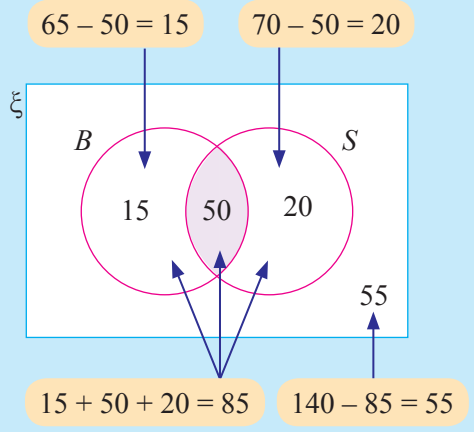
Memahami masalah

Jumlah murid = 140
Kelas Bahasa Melayu = 65
Kelas Sejarah = 70
Kelas Bahasa Melayu dan Kelas Sejarah = 50
Hitung
(a) jumlah murid yang dapat menyertai kelas intensif.
(b) jumlah murid yang tidak menyertai sebarang kelas intensif.

Merancang strategi

ξ = {jumlah murid}
B = {murid memilih kelas Bahasa Melayu}
S = {murid memilih kelas Sejarah}
Lukis gambar rajah Venn mewakili semua maklumat yang diberikan.

Melaksanakan strategi



Langkah:

1. Isikan $n(B \cap S) = 50$.
2. Isikan bilangan murid yang hanya mengambil mata pelajaran Bahasa Melayu.
   $65 - 50 = 15$
3. Isikan bilangan murid yang hanya mengambil mata pelajaran Sejarah.
   $70 - 50 = 20$
4. Murid yang menyertai kelas intensif
   $15 + 50 + 20 = 85$
5. Murid yang tidak menyertai kelas intensif
   $140 - 85 = 55$

Kesimpulan

(a) 85 orang murid memilih kelas intensif.
(b) 55 orang murid tidak menyertai sebarang kelas intensif.

Contoh 7

Sebanyak 200 orang pelajar universiti disoal selidik tentang penggunaan alat teknologi. Hasil kajian menunjukkan 155 orang pelajar memiliki telefon bimbit, 90 orang pelajar memiliki komputer riba, 37 orang pelajar memiliki tablet, 4 orang pelajar memiliki kedua-dua komputer riba dan tablet sahaja, 50 orang pelajar memiliki kedua-dua telefon bimbit dan komputer riba sahaja, 5 orang pelajar memiliki telefon bimbit dan tablet sahaja dan 83 orang pelajar memiliki telefon bimbit sahaja. Hitung

(a) jumlah pelajar yang memiliki ketiga-tiga alat teknologi tersebut.
(b) jumlah pelajar yang tidak memiliki ketiga-tiga alat teknologi tersebut.

Memahami masalah

Jumlah pelajar = 200 telefon bimbit = 155 komputer riba = 90 tablet = 37
telefon bimbit dan komputer riba sahaja = 50 komputer riba dan tablet sahaja = 4
telefon bimbit sahaja = 83 telefon bimbit dan tablet sahaja = 5

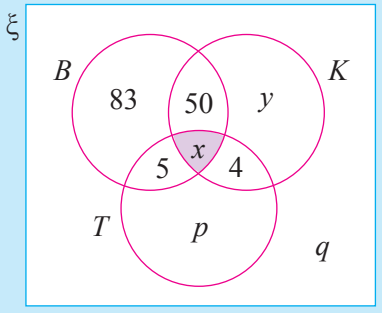
Hitung,
(a) jumlah pelajar yang memiliki ketiga-tiga alat teknologi tersebut.
(b) jumlah pelajar yang tidak memiliki ketiga-tiga alat teknologi tersebut.

Merancang strategi

ξ = {200 orang pelajar}
B = {pelajar yang memiliki telefon bimbit}
K = {pelajar yang memiliki komputer riba}
T = {pelajar yang memiliki tablet}

Lukis gambar rajah Venn yang mewakili semua maklumat yang diberikan.

Melaksanakan strategi



Langkah:

1. Lukis gambar rajah Venn seperti di sebelah dengan maklumat yang diberikan
2. Hitung nilai, $x = 155 - 83 - 50 - 5$
   $x = 17$
3. Hitung nilai, $y = 90 - 50 - 4 - 17$
   $y = 19$
4. Hitung nilai, $p = 37 - 5 - 17 - 4$
   $p = 11$
5. Hitung nilai, $q = 200 - 83 - 50 - 5 - 4 - x - y - p$
   $q = 200 - 83 - 50 - 5 - 4 - 17 - 19 - 11$
   $q = 11$

Kesimpulan

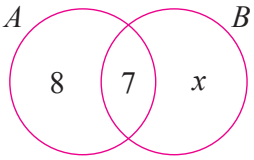
(a) 17 orang pelajar memiliki ketiga-tiga alat teknologi.
(b) 11 orang pelajar tidak memiliki ketiga-tiga alat teknologi tersebut.

Praktis Kendiri 4.1c

1. Gambar rajah Venn menunjukkan set A = {ahli Kelab Seni} dan set B = {ahli Kelab Sains}. Jika $n(A) = 15$ dan $n(B) = 22$, hitung

(a) nilai x.

(b) jumlah ahli bagi Kelab Seni dan Kelab Sains.



2. Sebanyak 150 orang murid mengambil ujian diagnostik bagi kedua-dua mata pelajaran Sains dan Matematik. Keputusan menunjukkan sebanyak 40% daripada jumlah murid lulus mata pelajaran Sains dan 30% daripada jumlah murid lulus kedua-dua mata pelajaran tersebut. Jika 8% daripada jumlah murid gagal dalam kedua-dua ujian tersebut, hitung

(a) bilangan murid yang lulus mata pelajaran Matematik.

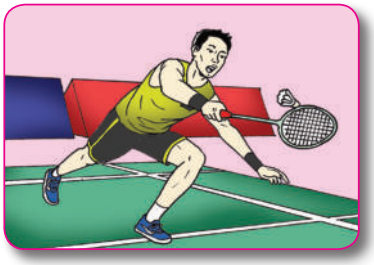
(b) bilangan murid yang hanya lulus mata pelajaran Sains.

(c) bilangan murid yang hanya lulus mata pelajaran Matematk.

3. Sebuah kedai kain mengadakan jualan murah bagi menghabiskan stok kain batik yang berwarna merah, hijau dan biru. Hasil jualan menunjukkan sebanyak 210 orang membeli kain batik tersebut. Jika sebanyak 70 orang membeli kain batik berwarna hijau sahaja, 13 orang membeli kedua-dua kain berwarna hijau dan biru, 50 orang membeli kain batik berwarna biru sahaja dan 15 orang membeli kedua-dua kain batik berwarna hijau dan merah, tidak ada yang membeli ketiga-tiga jenis kain batik tersebut dan tidak ada yang membeli kain berwarna merah dan biru, berapakah bilangan orang yang membeli kain batik berwarna merah sahaja?

4. Diberi ξ = {murid Tingkatan 4}, set K = {murid yang suka bermain piano} dan set L = {murid yang suka bermain biola}. Jika $n(\xi) = 35$, $n(K) = 15$, $n(L) = 9$ dan $n(K \cap L) = 5$, hitung bilangan murid yang tidak suka bermain kedua-dua alat muzik tersebut.

5. Sebuah Kelab Badminton mengadakan pertandingan badminton antara ahli kelab. Sebanyak 38 orang ahli terlibat dalam acara ini. 20 orang ahli bermain dalam acara beregu dan 26 orang ahli bermain dalam acara perseorangan. Hitung bilangan ahli yang terlibat dalam kedua-dua acara tersebut.



4.2 Kesatuan Set

Bagaimanakah anda menentukan dan menghuraikan kesatuan set dengan menggunakan pelbagai perwakilan?

Standard Pembelajaran

Menentukan dan menghuraikan kesatuan set dengan menggunakan dengan pelbagai perwakilan.

Kesatuan set P dan set Q ditulis menggunakan simbol $\cup$. $P \cup Q$ mewakili semua unsur dalam set P atau set Q atau kedua-dua set P dan set Q.

Rangsangan Minda 2

Tujuan: Menentukan dan menghuraikan kesatuan set dengan menggunakan pelbagai perwakilan.

Sekumpulan murid membuat pilihan antara tiga aktiviti masa lapang yang digemari, iaitu membaca, melayari Internet dan bersukan.

Amirah suka membaca.	Sofie suka melayari Internet.
Kiran suka melayari Internet.	Habibah suka membaca.
Adeline suka melayari Internet.	Ranjit suka bersukan.
Karim suka bersukan dan melayari Internet.	Kamal suka membaca dan bersukan.
Mei Yee suka membaca.	Farhan suka bersukan.

Langkah:

1. Bahagikan murid kepada beberapa kumpulan yang sesuai.
2. Setiap kumpulan dibekali kertas sebak, *sticky note,* kad lampu isyarat dan pen penanda berwarna.
3. Setiap kumpulan akan membaca situasi yang diberikan di atas dan melengkapkan tugasan yang diberikan.
4. Setiap kumpulan akan membentangkan hasil kerja mereka dengan menggunakan kaedah Galeri Jelajah Minda (*Gallery Walk*).

Tugasan:

(a) Sediakan satu jadual seperti berikut.

Nama murid yang suka membaca	Nama murid yang suka melayari Internet	Nama murid yang suka bersukan
• Amirah • Mei Yee • Habibah • Kamal		

(b) Tulis nama-nama murid yang mewakili setiap set yang diberikan menggunakan tatatanda set.

A = {murid yang suka membaca}

A = {Amirah, Mei Yee, Habibah, Kamal}

B = {murid yang suka melayari Internet}

B = { , , , }

C = {murid yang suka bersukan}

C = { , , , }

$A \cup B$ = {semua murid yang suka membaca atau melayari Internet}

$A \cup B$ = {Amirah, Mei Yee, Habibah, Kamal, Kiran, Adeline, Karim, Sofie}

$B \cup C$ = {semua murid yang suka melayari Internet atau bersukan}

$B \cup C$ = { , , , , , , }

$A \cup C$ = {semua murid yang suka membaca atau bersukan}

$A \cup C$ = { , , , , , , }

$A \cup B \cup C$ = {semua murid yang suka membaca, melayari Internet atau bersukan}

$A \cup B \cup C$ = { , , , , , , , , , }

(c) Lukis kesatuan set yang berikut dengan menggunakan gambar rajah Venn.

(i) set $A \cup B$

(ii) set $B \cup C$

(iii) set $A \cup B \cup C$

Perbincangan:

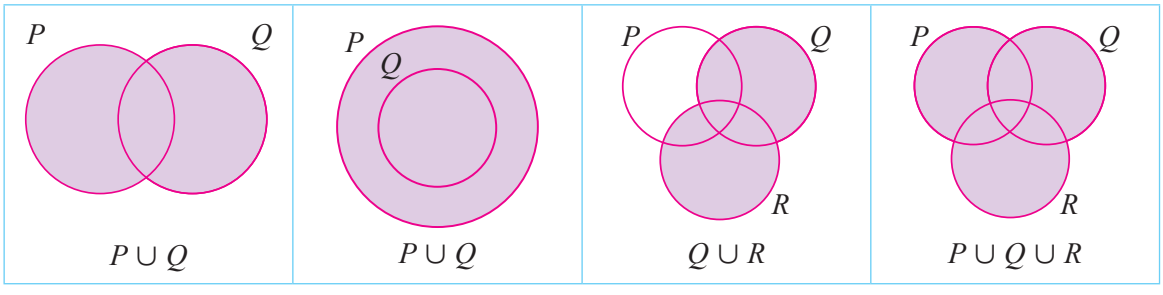
Bagaimanakah anda dapat menentukan kesatuan set berdasarkan aktiviti di atas?

Hasil daripada Rangsangan Minda 2, didapati bahawa;

> $A \cup B \cup C$ terdiri daripada semua murid dalam set A, set B atau set C iaitu Amirah, Mei Yee, Habibah, Kamal, Karim, Kiran, Adeline, Sofie, Ranjit dan Farhan.

Bagaimanakah anda menentukan kesatuan antara dua atau lebih set dengan gambar rajah Venn?

Kesatuan antara dua atau lebih set boleh diwakili oleh rantau berlorek seperti dalam gambar rajah Venn di bawah.



Contoh 8

Diberi set P = {faktor bagi 24}, set Q = {gandaan 3 yang kurang daripada 20} dan set R = {gandaan 4 yang kurang daripada 20}.

(a) Senaraikan semua unsur bagi set yang berikut.

(i) $P \cup Q$ (ii) $P \cup R$ (iii) $Q \cup R$ (iv) $P \cup Q \cup R$

(b) Lukis gambar rajah Venn yang mewakili set P, set Q, set R dan lorekkan kawasan yang mewakili kesatuan set yang berikut.

(i) $P \cup Q$ (ii) $P \cup Q \cup R$

Penyelesaian:

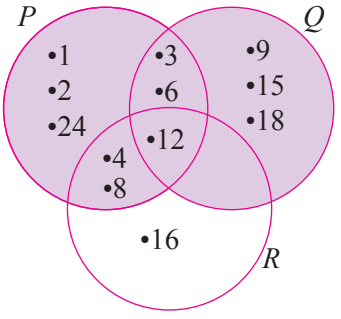
(a) (i) P = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}
Q = {3, 6, 9, 12, 15, 18}
$P \cup Q$ = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 15, 18, 24}

(ii) P = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}
R = {4, 8, 12, 16}
$P \cup R$ = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24}

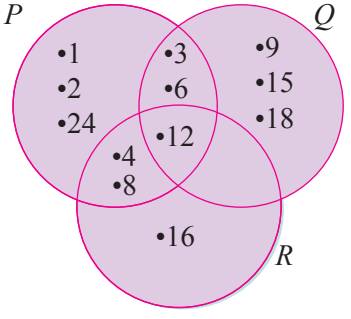
(iii) Q = {3, 6, 9, 12, 15, 18}
R = {4, 8, 12, 16}
$Q \cup R$ = {3, 4, 6, 8, 9, 12, 15, 16, 18}

(iv) P = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}
Q = {3, 6, 9, 12, 15, 18}
R = {4, 8, 12, 16}
$P \cup Q \cup R$ = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 15, 16, 18, 24}

(b) (i)

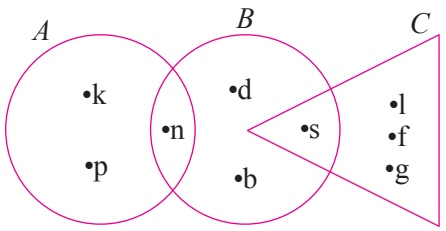


(ii)



Praktis Kendiri 4.2a

1. Gambar rajah Venn menunjukkan set A, set B dan set C dengan keadaan set semesta, $\xi = A \cup B \cup C$



Senaraikan semua unsur bagi set yang berikut.

(a) $A \cup B$ (b) $A \cup C$ (c) $B \cup C$ (d) $A \cup B \cup C$

2. Diberi $\xi = \{x : x \text{ ialah integer, } 50 \leqslant x \leqslant 60\}$, set $P = \{x : x \text{ ialah gandaan 3}\}$, set $Q = \{x : x \text{ ialah nombor ganjil}\}$ dan set $R = \{x : x \text{ ialah nombor perdana}\}$.

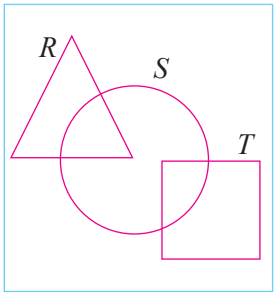
(a) Lukis gambar rajah Venn mewakili set semesta ξ, set P, set Q dan set R.

(b) Senaraikan semua unsur bagi set yang berikut.

(i) $P \cup Q$ (ii) $P \cup R$ (iii) $Q \cup R$ (iv) $P \cup Q \cup R$

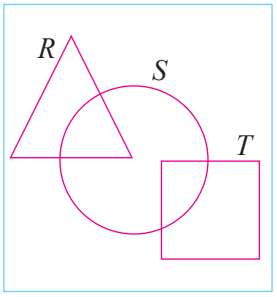
3. Lorekkan kawasan yang mewakili bagi set yang diberikan.

(a) ξ



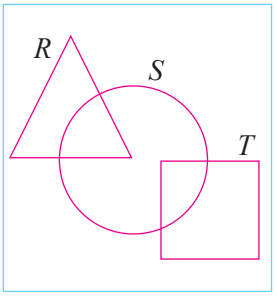
$R \cup T$

(b) ξ



$R \cup S$

(c) ξ



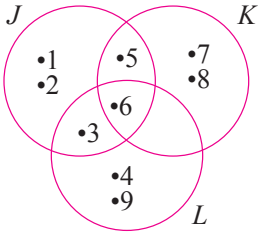
$R \cup S \cup T$

4. Gambar rajah Venn menunjukkan set J, set K dan set L dengan keadaan set semesta, $\xi = J \cup K \cup L$.
Senaraikan semua unsur bagi set yang berikut.

(a) $J \cup K$

(b) $J \cup L$

(c) $J \cup K \cup L$



Bagaimanakah anda menentukan pelengkap bagi kesatuan set?

Pelengkap bagi kesatuan set ditulis dengan menggunakan $(A \cup B)'$, dibaca sebagai "pelengkap bagi kesatuan set A atau set B". Pelengkap bagi kesatuan set A atau set B bermaksud semua unsur yang bukan dalam set A atau set B.

Standard Pembelajaran

Menentukan pelengkap bagi kesatuan set.

Contoh 9

Diberi set semesta, $\xi = \{x : x \text{ ialah integer}, 50 \leqslant x \leqslant 60\}$, set $G = \{x : x \text{ ialah nombor perdana}\}$, set $H = \{x : x \text{ ialah gandaan 4}\}$ dan set $R = \{x : x \text{ ialah gandaan 5}\}$, senaraikan semua unsur dan nyatakan bilangan unsur bagi set yang berikut.

(a) $(G \cup H)'$ (b) $(G \cup I)'$ (c) $(H \cup I)'$ (d) $(G \cup H \cup I)'$

Penyelesaian:

$\xi = \{50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60\}$
$G = \{53, 59\}$
$H = \{52, 56, 60\}$
$I = \{50, 55, 60\}$

(a) $G \cup H = \{52, 53, 56, 59, 60\}$
$(G \cup H)' = \{50, 51, 54, 55, 57, 58\}$
$n(G \cup H)' = 6$

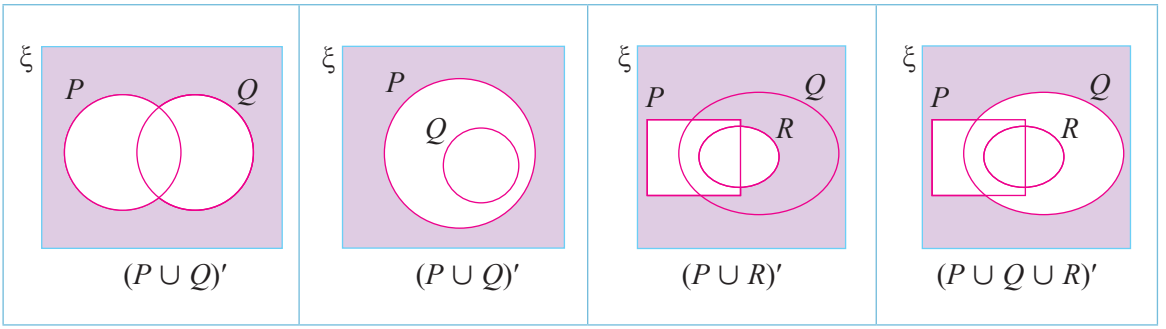
(b) $G \cup I = \{50, 53, 55, 59, 60\}$
$(G \cup I)' = \{51, 52, 54, 56, 57, 58\}$
$n(G \cup I)' = 6$

(c) $H \cup I = \{50, 52, 55, 56, 60\}$
$(H \cup I)' = \{51, 53, 54, 57, 58, 59\}$
$n(H \cup I)' = 6$

(d) $G \cup H \cup I = \{50, 52, 53, 55, 56, 59, 60\}$
$(G \cup H \cup I)' = \{51, 54, 57, 58\}$
$n(G \cup H \cup I)' = 4$

Bagaimanakah anda menentukan pelengkap bagi kesatuan antara dua atau lebih set dengan gambar rajah Venn?

Pelengkap bagi kesatuan antara dua atau lebih set boleh diwakili oleh rantau berlorek seperti dalam gambar rajah Venn di bawah.



Contoh 10

Tiga buah agensi pelancongan swasta iaitu A, B dan C telah dipilih untuk mengadakan pameran pelancongan 2020 di negeri Sarawak. Oleh itu, beberapa bahagian yang dipilih di negeri Sarawak untuk mengadakan pameran tersebut adalah seperti yang berikut.

ξ = {Kapit, Miri, Bintulu, Sibu, Limbang, Mukah, Kuching, Betong}
A = {Miri, Sibu, Kuching, Betong}
B = {Miri, Sibu, Kapit, Limbang}
C = {Miri, Betong, Kapit, Mukah}

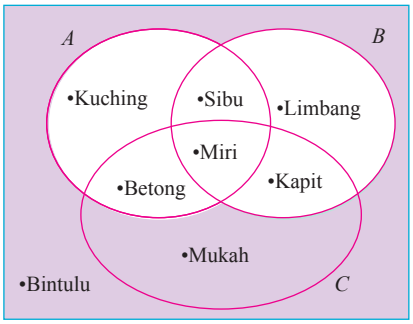
(a) Senaraikan semua unsur bagi set yang berikut.
(i) $(A \cup B)'$ (ii) $(B \cup C)'$ (iii) $(A \cup B \cup C)'$

(b) Lukis gambar rajah Venn bagi set yang berikut dan lorekkan kawasan yang mewakili pelengkap bagi kesatuan set yang diberikan.
(i) $(A \cup B)'$ (ii) $(B \cup C)'$ (iii) $(A \cup B \cup C)'$

Penyelesaian:

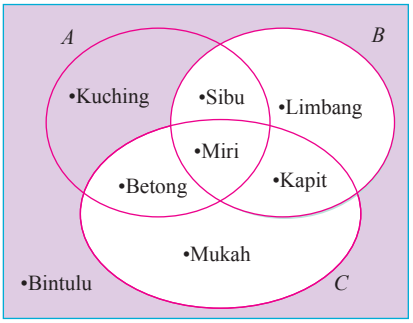
(a) (i) $A \cup B$ = {Kapit, Miri, Sibu, Limbang, Kuching, Betong}
$(A \cup B)'$ = {Mukah, Bintulu}

(b) (i)



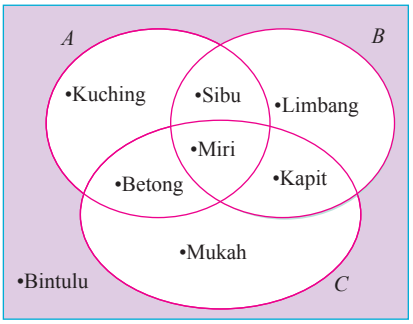
(a) (ii) $B \cup C$ = {Kapit, Miri, Sibu, Limbang, Betong, Mukah}
$(B \cup C)'$ = {Kuching, Bintulu}

(b) (ii)



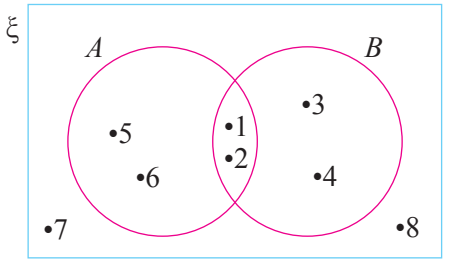
(a) (iii) $A \cup B \cup C$ = {Kapit, Miri, Sibu, Limbang, Mukah, Betong, Kuching}
$(A \cup B \cup C)'$ = {Bintulu}

(b) (iii)



Praktis Kendiri 4.2b

1. Gambar rajah Venn menunjukkan set semesta ξ, set A dan set B.



Senaraikan semua unsur bagi set yang berikut.

(a) A' (b) B' (c) $(A \cup B)'$

2. Diberi $\xi = \{x : x \text{ ialah integer, } 10 \leqslant x \leqslant 30\}$, set $G = \{x : x \text{ ialah nombor perdana}\}$, set $H = \{x : x \text{ ialah hasil tambah dua digit adalah ganjil}\}$ dan set $I = \{x : x \text{ ialah gandaan 6}\}$.

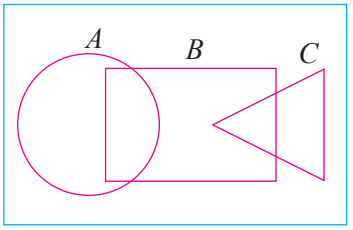
(a) Lukis gambar rajah Venn yang mewakili set semesta ξ , set G, set H dan set I.

(b) Senaraikan semua unsur bagi set yang berikut.

(i) $(G \cup H)'$ (ii) $(H \cup I)'$ (iii) $(G \cup H \cup I)'$

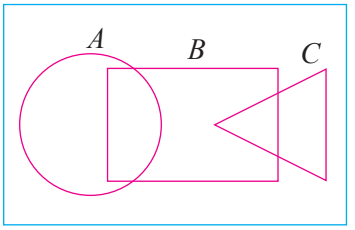
3. Lorekkan kawasan yang mewakili bagi set yang diberikan.

(a) ξ



$(A \cup B)'$

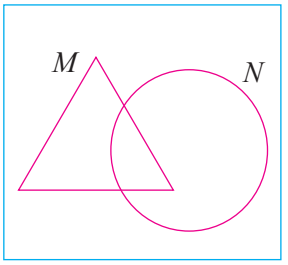
(b) ξ



$(A \cup B \cup C)'$

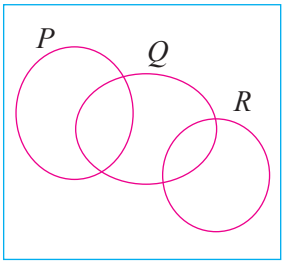
4. Lorekkan kawasan yang mewakili bagi set yang diberikan.

(a) ξ



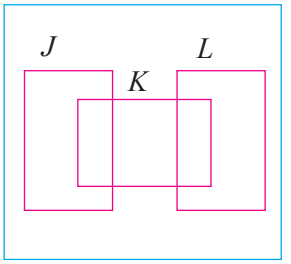
$(M \cup N)'$

(b) ξ



$(Q \cup R)'$

(c) ξ



$(J \cup K \cup L)'$

Bagaimanakah anda menyelesaikan masalah yang melibatkan kesatuan set?

Standard Pembelajaran

Menyelesaikan masalah yang melibatkan kesatuan set.

Contoh 11

Sebanyak 26 orang murid telah menyertai program pengakap di tepi sungai. Aktiviti yang dilakukan dalam program tersebut ialah berkayak dan memancing ikan. 18 orang murid berkayak dan 15 orang murid memancing ikan manakala 9 orang murid terlibat dengan kedua-dua aktiviti berkayak dan memancing ikan. Berapakah jumlah murid yang terlibat dalam aktiviti program tersebut?

Memahami masalah

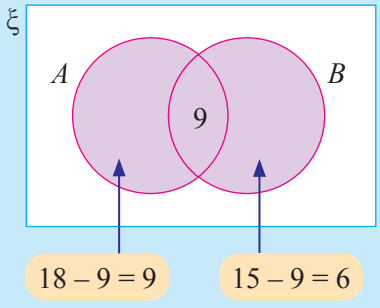
Jumlah murid = 26
Berkayak = 18
Memancing ikan = 15
Berkayak dan memancing ikan = 9
Hitung jumlah murid yang terlibat dalam aktiviti program ini.

Merancang strategi

ξ = {jumlah murid}
A = {murid yang berkayak}
B = {murid yang memancing ikan}

Lukis sebuah gambar rajah Venn untuk mewakili semua maklumat yang diberikan. Hitung
(a) jumlah murid yang berkayak sahaja
(b) jumlah murid yang memancing sahaja
(c) jumlah murid yang tidak terlibat dalam aktiviti program ini
(d) jumlah murid yang terlibat dalam aktiviti program ini, $n(A \cup B)$

Melaksanakan strategi



(a) Berkayak sahaja
= 18 – 9
= 9
(b) Memancing ikan sahaja
= 15 – 9
= 6
(c) Jumlah murid yang tidak terlibat dalam aktiviti
= 26 – 9 – 9 – 6
= 2
(d) Jumlah murid yang terlibat dalam aktiviti, $n(A \cup B)$
26 – 2 = 24

Semak Jawapan ✓ 9 + 9 + 6 = 24

Kesimpulan

24 orang murid terlibat dalam aktiviti program tersebut, $n(A \cup B) = 24$

Contoh 12

Sebanyak 100 orang dewasa terlibat dalam kajian mengenai bahan bacaan yang menjadi pilihan utama mereka. 40 orang memilih surat khabar, 25 orang memilih majalah, 18 orang memilih buku cerita, 8 orang memilih kedua-dua surat khabar dan majalah, 7 orang memilih kedua-dua majalah dan buku cerita, 5 orang memilih kedua-dua surat khabar dan buku cerita dan 3 orang memilih ketiga-tiga bahan bacaan tersebut. Berapakah bilangan yang tidak memilih sebarang bahan bacaan?

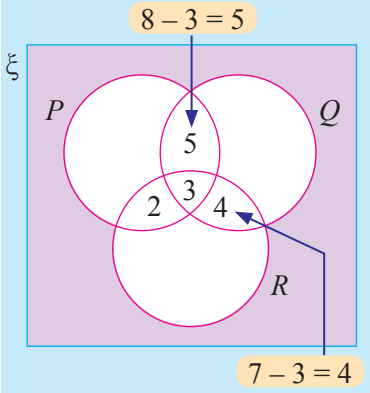
Memahami masalah

Jumlah orang dewasa = 100 Surat khabar = 40 Majalah = 25 Buku cerita = 18
Surat khabar dan majalah = 8 Surat khabar, majalah dan buku cerita = 3
Majalah dan buku cerita = 7
Surat khabar dan buku cerita = 5
Hitung bilangan yang tidak memilih mana-mana bahan tersebut.

Merancang strategi

ξ ={Jumlah orang dewasa}
P = {surat khabar} Q = {majalah} R = {buku cerita}
Lukis sebuah gambar rajah Venn mewakili semua maklumat yang diberikan. Hitung
(a) jumlah orang pilih surat khabar sahaja.
(b) jumlah orang pilih majalah sahaja.
(c) jumlah orang pilih buku cerita sahaja.
(d) jumlah orang yang tidak memilih sebarang bahan tersebut. $n(A \cup B \cup C)'$

Melaksanakan strategi



(a) Surat khabar sahaja
= 40 – 5 – 3 – 2
= 30

(b) Majalah sahaja
= 25 – 5 – 3 – 4
=13

(c) Buku cerita sahaja
= 18 – 3 – 4 – 2
= 9

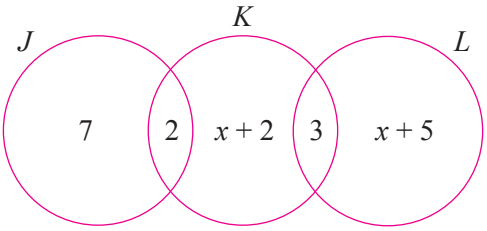
(d) Jumlah orang yang tidak memilih sebarang bahan tersebut.
$n(A \cup B \cup C)' = 100 - 5 - 3 - 4 - 2 - 30 - 13 - 9$
$= 34$

Kesimpulan

34 orang yang tidak memilih sebarang bahan tersebut.
$n(A \cup B \cup C)' = 34$

Praktis Kendiri 4.2c

1. Gambar rajah Venn menunjukkan unsur-unsur dalam set J, set K dan set L. Diberi $\xi = J \cup K \cup L$ dan $n(\xi) = 25$, hitung nilai x.



2. Diberi set B = {murid yang berasal dari Sabah} dan set T = {murid yang berasal dari Sarawak}. Jika sebuah kelas terdiri daripada 40 orang murid dan $n(B \cup T) = 32$, hitung bilangan murid yang tidak berasal dari Sabah dan Sarawak.

3. Sebuah sekolah telah mengadakan sambutan Bulan Kemerdekaan dengan menganjurkan aktiviti drama, nyanyian lagu patriotik, dan kuiz Sejarah. Sebanyak 40 orang murid telah menyertai aktiviti tersebut. Diberi $\frac{1}{2}$ daripada jumlah murid menyertai drama, $\frac{1}{4}$ daripada jumlah murid menyertai nyanyian lagu patriotik, 6 orang murid menyertai drama dan kuiz Sejarah dan seorang murid menyertai ketiga-tiga aktiviti tersebut. Sekiranya tidak ada penyertaan murid dalam aktiviti drama dan lagu patriotik sahaja dan juga tidak ada penyertaan murid dalam aktiviti lagu patriotik dan kuiz Sejarah sahaja, berapakah bilangan murid yang menyertai kuiz Sejarah sahaja?

4. Sebuah kedai buku membuat kajian terhadap 200 orang pelanggan berkaitan dengan pembelian buku fiksyen atau buku bukan fiksyen. Kajian menunjukkan 114 orang membeli buku bukan fiksyen, 52 orang membeli buku fiksyen dan 27 orang membeli kedua-dua buku fiksyen dan bukan fiksyen. Hitung,

(a) bilangan pelanggan yang membeli buku fiksyen sahaja.

(b) bilangan pelanggan yang membeli buku bukan fiksyen sahaja.

(c) bilangan pelanggan yang tidak membeli sebarang buku tersebut.

5. Murid Tingkatan 4 yang terlibat dalam Program Kitar Semula telah mengumpulkan surat khabar lama, botol plastik dan tin. 72 orang murid mengumpulkan botol plastik, 36 orang murid mengumpulkan surat khabar lama, 25 orang murid mengumpulkan tin, 20 orang murid mengumpulkan surat khabar lama dan botol plastik, 8 orang murid mengumpulkan surat khabar lama dan tin, 18 orang murid mengumpulkan botol plastik dan tin dan 7 orang murid mengumpulkan ketiga-tiga bahan tersebut. Hitung jumlah murid yang terlibat dalam program ini.

4.3 Gabungan Operasi Set

Bagaimanakah anda menentukan dan menghuraikan gabungan operasi set menggunakan pelbagai perwakilan?

Standard Pembelajaran

Menentukan dan menghuraikan gabungan operasi set menggunakan pelbagai perwakilan.

Gabungan operasi set melibatkan kedua-dua persilangan set ($\cap$) dan kesatuan set ($\cup$) pada masa yang sama. Gabungan operasi set perlu diselesaikan dari kiri ke kanan, namun jika terdapat operasi dalam kurungan, operasi dalam kurungan mesti diselesaikan dahulu.

Contoh 13

Jadual menunjukkan hobi sekumpulan murid.

Arif menyanyi	Iris melukis, menyanyi dan menari
Zarif melukis	Alan menyanyi dan menari
Lily menari	May menari dan melukis
Emy menari dan menyanyi	Jay menyanyi dan melukis
Getha melukis	Nani menari

P = {murid yang menyanyi}, Q = {murid yang menari} dan R = {murid yang melukis}.

Berdasarkan jadual di atas,

(a) senaraikan semua unsur bagi set yang berikut.

(i) $(P \cup Q) \cap R$ (ii) $Q \cup (P \cap R)$

(b) Lukis gambar rajah Venn serta lorekkan kawasan yang mewakili setiap set yang berikut.

(i) $(P \cup Q) \cap R$ (ii) $Q \cup (P \cap R)$

Penyelesaian:

P = {Arif, Emy, Iris, Alan, Jay}

Q = {Lily, Emy, Iris, Alan, May, Nani}

R = {Zarif, Getha, Iris, May, Jay}

(a) (i) $(P \cup Q)$ = {Arif, Emy, Iris, Alan, Jay, Lily, May, Nani}

R = {Zarif, Getha, Iris, May, Jay}

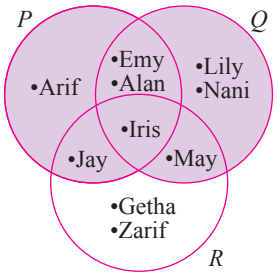
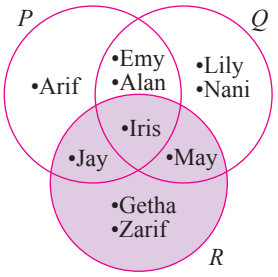
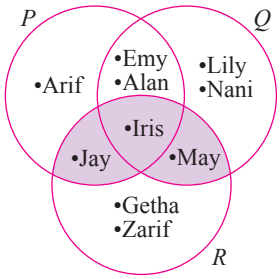
$(P \cup Q) \cap R$ = {May, Iris, Jay}

(ii) Q = {Emy, Iris, Alan, Lily, May, Nani}

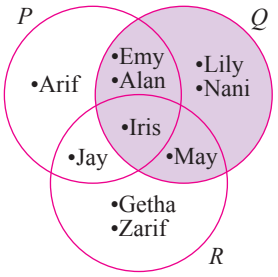
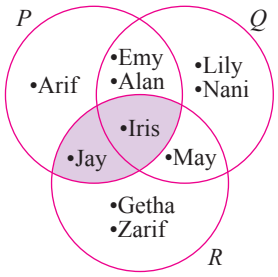
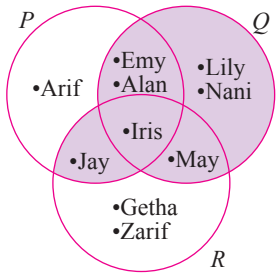
$(P \cap R)$ = {Iris, Jay}

$Q \cup (P \cap R)$ = {Lily, Emy, Iris, Alan, May, Nani, Jay}

(b) (i) Lorekkan kawasan bagi set $(P \cup Q)$.
Lorekkan kawasan bagi set R.
Set $(P \cup Q) \cap R$ ialah kawasan yang sama meliputi kedua-dua set $(P \cup Q)$ dan set R.

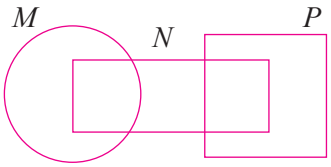
$(P \cup Q)$	R	$(P \cup Q) \cap R$
		

(ii) Lorekkan kawasan bagi set Q.
Lorekkan kawasan bagi set $(P \cap R)$.
Set $Q \cup (P \cap R)$ ialah semua kawasan yang meliputi kedua-dua set Q dan set $(P \cap R)$.

Q	$(P \cap R)$	$Q \cup (P \cap R)$
		

Praktis Kendiri 4.3a

1. Gambar rajah Venn menunjukkan set M, set N dan set P dengan keadaan set semesta, $\xi = M \cup N \cup P$. Lorekkan set $(M \cup P) \cap N$.



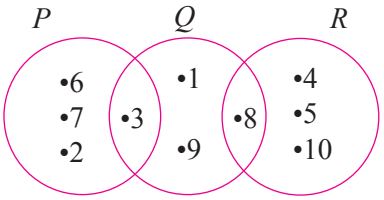
2. Diberi set semesta, $\xi = \{x : x \text{ ialah integer}, 1 \leqslant x \leqslant 15\}$, set $S = \{x : x \text{ ialah nombor ganjil}\}$, set $R = \{x : x \text{ ialah nombor perdana}\}$ dan set $T = \{1, 4, 7, 10, 13\}$. Senaraikan semua unsur bagi set $(S \cup T) \cap R$.

3. Gambar rajah Venn menunjukkan set P, set Q dan set R dengan keadaan set semesta, $\xi = P \cup Q \cup R$. Senaraikan semua unsur bagi set yang berikut.

(a) $P \cap (Q \cup R)$

(b) $Q \cap (P \cup R)$

(c) $(Q \cap R) \cup P$



Bagaimanakah anda menentukan pelengkap bagi gabungan operasi set?

Pelengkap bagi gabungan operasi set melibatkan pelengkap bagi salah satu persilangan set ($\cap$) atau kesatuan set ($\cup$) atau kedua-dua persilangannya. Pelengkap bagi gabungan operasi set perlu diselesaikan dari kiri ke kanan, namun jika terdapat operasi dalam kurungan, operasi dalam kurungan mesti diselesaikan dahulu.

Standard Pembelajaran

Menentukan pelengkap bagi gabungan operasi set.

Contoh 14

Diberi $\xi = \{x : x \text{ ialah integer, } 30 \leqslant x \leqslant 40\}$, set $A = \{x : x \text{ ialah gandaan 3}\}$ dan set $B = \{x : x \text{ ialah hasil tambah dua digit adalah nombor ganjil}\}$ dan $C = \{30, 32, 35, 39, 40\}$.

(a) Senaraikan semua unsur bagi setiap set yang berikut.

(i) $(A \cup B)' \cap C$ (ii) $A' \cap (B \cup C)$ (iii) $(A \cap C)' \cup (B \cap C)$

(b) Lukis gambar rajah Venn dan lorekkan kawasan yang mewakili setiap set yang berikut.

(i) $(A \cup B)' \cap C$ (ii) $A' \cap (B \cup C)$ (iii) $(A \cap C)' \cup (B \cap C)$

Penyelesaian:

$\xi = \{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40\}$
$A = \{30, 33, 36, 39\}$
$B = \{30, 32, 34, 36, 38\}$
$C = \{30, 32, 35, 39, 40\}$

MEMORI SAYA

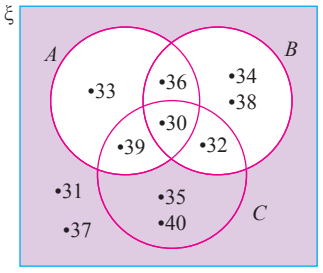
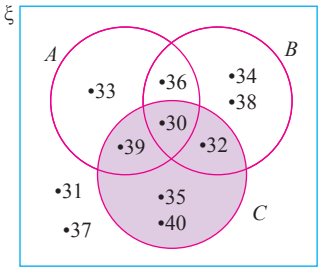
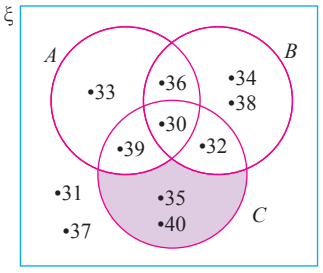
Bagi suatu set A dalam set semesta, pelengkap bagi set A ditulis sebagai A', bermaksud semua unsur yang bukan dalam set A.

(a) (i) $(A \cup B)' = \{31, 35, 37, 40\}$
$C = \{30 , 32, 35,39 40\}$
$(A \cup B)' \cap C = \{35, 40\}$

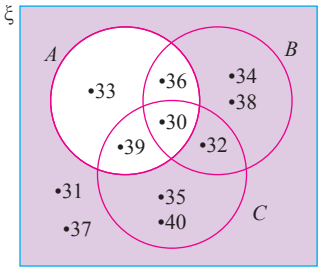
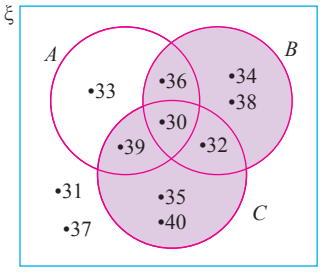
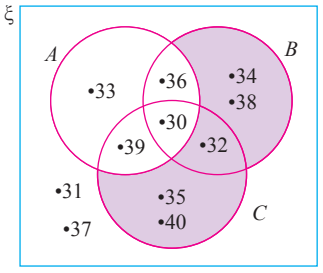
(ii) $A' = \{31, 32, 34, 35, 37, 38, 40\}$
$(B \cup C) = \{30, 32, 34, 35, 36, 38, 39, 40\}$
$A' \cap (B \cup C) = \{32, 34, 35, 38, 40\}$

(iii) $(A \cap C)' = \{31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 40\}$
$(B \cap C) = \{30, 32\}$
$(A \cap C)' \cup (B \cap C) = \{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 40\}$

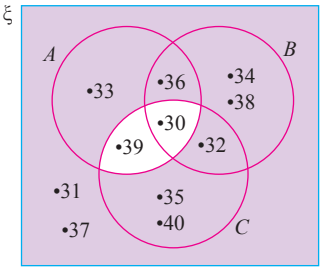
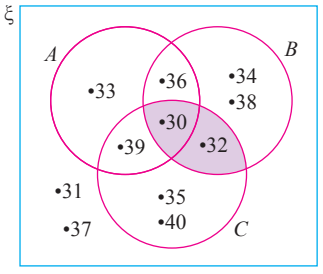
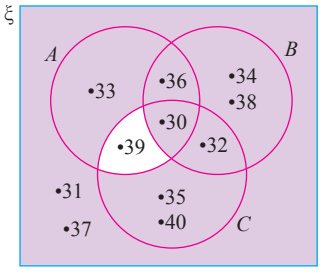
(b) (i) Lorekkan kawasan bagi set $(A \cup B)'$
Lorekkan kawasan bagi set C
Set $(A \cup B)' \cap C$ ialah kawasan yang sama meliputi kedua-dua set $(A \cup B)'$ dan set C

$(A \cup B)'$	C	$(A \cup B)' \cap C$
		

(ii) Lorekkan kawasan bagi set A'
Lorekkan kawasan bagi set $(B \cup C)$
Set $A' \cap (B \cup C)$ ialah kawasan yang sama meliputi kedua-dua set A' dan set $(B \cup C)$

A'	$(B \cup C)$	$A' \cap (B \cup C)$
		

(iii) Lorekkan kawasan bagi set $(A \cap C)'$
Lorekkan kawasan bagi set $(B \cap C)$
Set $(A \cap C)' \cup (B \cap C)$ ialah semua kawasan yang meliputi kedua-dua set $(A \cap C)'$ dan set $(B \cap C)$

$(A \cap C)'$	$(B \cap C)$	$(A \cap C)' \cup (B \cap C)$
		

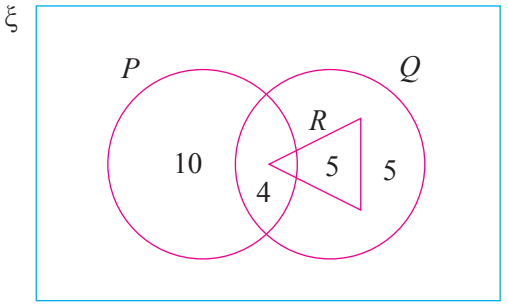
Praktis Kendiri 4.3b

1. Diberi $\xi = \{x : x \text{ ialah integer, } 10 \leqslant x \leqslant 20\}$, set $L = \{x : x \text{ ialah gandaan } 2\}$, set $M = \{13, 16, 19\}$ dan set $N = \{x : x \text{ ialah gandaan } 5\}$, senaraikan semua unsur bagi set yang berikut.

(a) $L' \cap (M \cup N)$

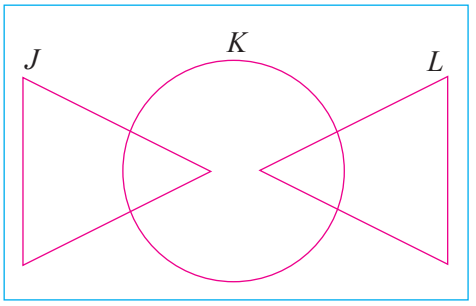
(b) $(M \cup N)' \cap L$

2. Gambar rajah Venn menunjukkan bilangan unsur dalam set P, set Q dan set R yang belum lengkap. Diberi bahawa $n(P \cap Q) = n(P \cup Q)'$ dan $n(\xi) = 50$. Tentukan $n(P)$.

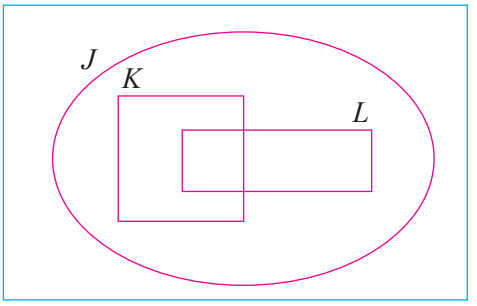


3. Lorekkan kawasan yang mewakili $(J \cap K)' \cap (K \cup L)$.

(a)



(b)



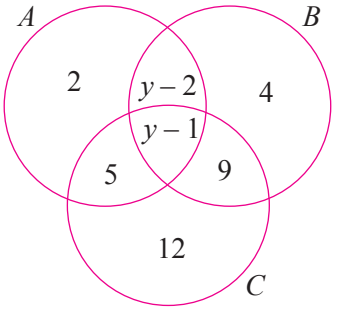
4. Gambar rajah Venn menunjukkan set semesta.

$\xi = A \cup B \cup C$ dan $n(B') = n(B \cap C)$

Tentukan,

(a) nilai y

(b) $n(A \cup B \cup C)$



Bagaimanakah anda menyelesaikan masalah yang melibatkan gabungan operasi set?

Standard Pembelajaran

Menyelesaikan masalah yang melibatkan gabungan operasi set.

Contoh 15

Persatuan Penduduk Taman Bahagia menganjurkan beberapa pertandingan sukan supaya penduduk menyedari akan kepentingan kesihatan diri. Sebanyak 35 orang menyertai pertandingan bola sepak, 24 orang menyertai pertandingan pingpong, 13 orang menyertai pertandingan badminton. Manakala 4 orang menyertai pertandingan bola sepak dan pingpong, 8 orang menyertai pertandingan pingpong dan badminton dan 2 orang menyertai ketiga-tiga pertandingan tersebut. Tiada peserta menyertai pertandingan badminton dan bola sepak sahaja. Hitung jumlah peserta yang hanya menyertai satu pertandingan sahaja.

Memahami masalah

Jumlah peserta = ?

Bola sepak = 35 Pingpong = 24 Badminton = 13

Bola sepak dan pingpong sahaja = 4 Badminton dan bola sepak sahaja = 0

Pingpong dan badminton sahaja = 8 Bola sepak, pingpong dan badminton = 2

Hitung jumlah peserta yang menyertai satu pertandingan sahaja.

Merancang strategi

ξ = {jumlah peserta}

A = {peserta bola sepak} B = {peserta pingpong } C = {peserta badminton}

Lukis gambar rajah Venn mewakili semua maklumat yang diberikan.

Hitung

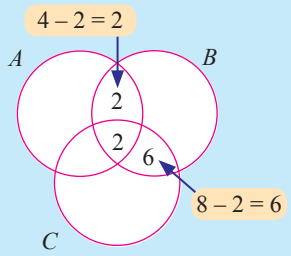
(a) jumlah peserta bola sepak sahaja

(b) jumlah peserta yang badminton sahaja

(c) jumlah peserta yang pingpong sahaja

(d) jumlah peserta yang hanya menyertai satu pertandingan sahaja.

Melaksanakan strategi



(a) Bola sepak sahaja
= 35 – 4
= 31

(b) Badminton sahaja
= 13 – 6 – 2
= 5

(c) Pingpong sahaja
= 24 – 6 – 2 – 2
= 14

(d) Jumlah peserta yang hanya menyertai satu pertandingan sahaja
= 31 + 14 + 5
= 50

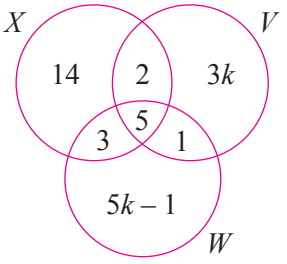
Kesimpulan

50 peserta yang menyertai satu pertandingan sahaja.

Praktis Kendiri 4.3c

1. Sebuah pasar raya mengadakan kempen "Hari Tanpa Beg Plastik". Pembeli yang hadir perlu membeli beg plastik atau beg guna semula untuk membungkus barangan yang dibeli. Sebanyak 90 orang pembeli yang hadir, 51 orang membeli beg plastik, 48 orang membeli beg guna semula, 9 orang membeli kedua-dua beg plastik dan beg guna semula. Hitung bilangan pembeli yang tidak menggunakan beg plastik.

2. Gambar rajah Venn menunjukkan bilangan unsur dalam set X, set V dan set W. Diberi $\xi = X \cup V \cup W$ dan $n(\xi) = 56$. Tentukan nilai k.



3. Sebanyak 100 orang kanak-kanak diminta memilih makanan yang disediakan iaitu burger, salad dan nasi lemak. Sebanyak 50 orang memilih burger, 60 orang memilih nasi lemak, 5 orang memilih burger dan salad, 3 orang memilih nasi lemak dan salad, 22 orang memilih burger dan nasi lemak. Jika hanya seorang yang memilih ketiga-tiga makanan tersebut, hitung jumlah kanak-kanak yang hanya memilih salad sahaja.

4. Berdasarkan kajian terhadap 100 orang dewasa, sebanyak 68 orang memiliki kereta nasional, manakala 52 orang memiliki kereta import. Jika 27 orang memiliki kedua-dua kereta import dan kereta nasional, hitung bilangan yang

(a) hanya memiliki kereta nasional.

(b) hanya memiliki kereta import.

(c) tidak memiliki kereta.

Praktis Komprehensif

1. Diberi set semesta, $\xi = \{2, 3, 5, 6\}$, set $P = \{3, 5\}$, set $Q = \{2, 3, 5\}$ dan set $R = \{3, 6\}$. Senaraikan semua unsur bagi set yang berikut.

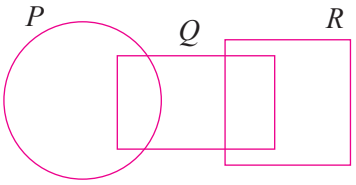
(a) $P \cap Q$ (b) $P \cap R$ (c) $P \cap Q \cap R$ (d) $(P \cap Q \cap R)'$

2. Diberi set $M = \{b, a, i, k\}$, set $N = \{b, u, d, i\}$ dan set $P = \{b, e, r, a, n, i\}$. Senaraikan semua unsur bagi set yang berikut.

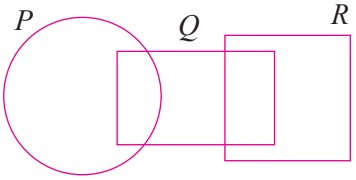
(a) $M \cup N$ (b) $M \cup P$ (c) $M \cup N \cup P$

3. Lorekkan kawasan yang mewakili set yang diberikan, dengan keadaan set semesta, $\xi = P \cup Q \cup R$

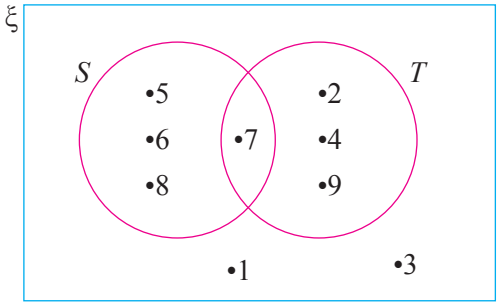
(a) $P \cap Q$



(b) $P \cup R$



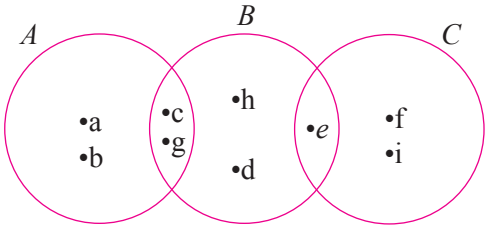
4. Gambar rajah Venn menunjukkan set semesta ξ, set S dan set T.



Senaraikan semua unsur bagi set yang berikut.

(a) T' (b) $S \cup T$ (c) $S' \cap T$ (d) $(S \cap T)'$

5. Gambar rajah Venn menunjukkan unsur-unsur set A, set B dan set C. Jika set semesta, $\xi = A \cup B \cup C$, senaraikan unsur A'.

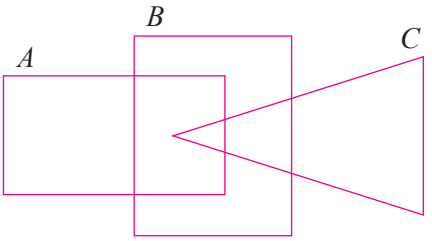


6. Diberi $\xi = \{x : x \text{ ialah integer, } 10 \leqslant x \leqslant 30\}$, set $P = \{x : x \text{ ialah nombor perdana}\}$, set $Q = \{x : x \text{ ialah nombor gandaan 5}\}$, set $R = \{x : x \text{ ialah faktor bagi 24}\}$, senaraikan semua unsur bagi set yang berikut.

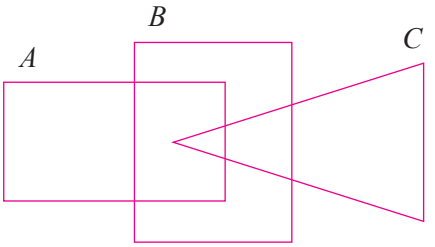
(a) Q' (b) $P \cup R'$ (c) $(P \cup R)' \cap Q$

7. Lorekkan kawasan yang mewakili set yang diberikan, dengan keadaan set semesta, $\xi = A \cup B \cup C$.

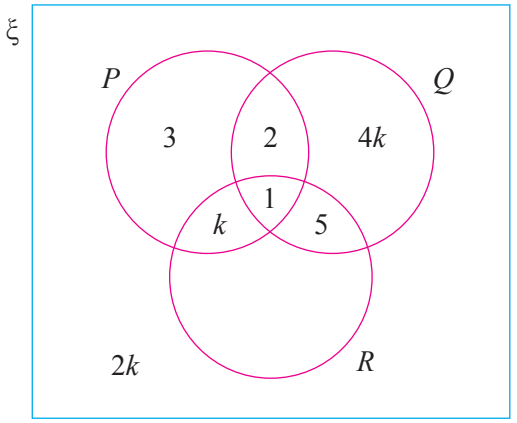
(a) $A \cap (B \cup C)$



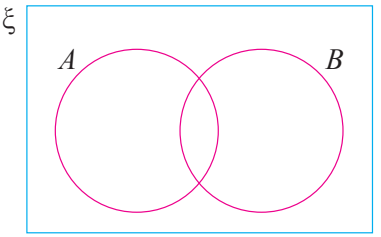
(b) $C \cup (A \cap B)'$



8. Gambar rajah Venn menunjukkan set semesta ξ, set P, set Q dan R. Diberi $n(Q) = n(P \cup R)'$, tentukan $n(\xi)$.



9. Gambar rajah Venn menunjukkan set semesta $\xi = \{\text{murid Tingkatan 4}\}$, set $A = \{\text{ahli Kelab Muzik}\}$ dan set $B = \{\text{ahli Kelab Robotik}\}$. Diberi $n(\xi) = 58$, $n(A) = 20$, $n(B) = 16$ dan $n(A \cap B) = 9$, tentukan bilangan murid yang bukan ahli kedua-dua kelab tersebut.



10. Sebanyak 55 orang murid diminta memilih dua aktiviti semasa cuti sekolah. 28 orang murid memilih aktiviti sukan, manakala 21 orang murid memilih aktiviti khidmat masyarakat. Jika 12 orang murid tidak memilih sebarang aktiviti tersebut, berapakah bilangan murid yang memilih kedua-dua aktiviti tersebut?

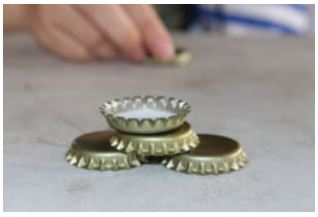
11. Amalan berjimat cermat dalam kalangan remaja dipengaruhi oleh faktor keluarga, masyarakat dan media massa. Sebanyak 80 orang remaja telah disoal selidik. Didapati 30 orang remaja dipengaruhi oleh keluarga, 15 orang remaja dipengaruhi oleh keluarga dan masyarakat, 9 orang remaja dipengaruhi oleh masyarakat dan media massa, 7 orang remaja hanya dipengaruhi oleh keluarga dan 3 orang remaja dipengaruhi oleh ketiga-tiga faktor tersebut. Diberi nisbah bilangan yang hanya dipengaruhi oleh masyarakat dan yang hanya dipengaruhi media massa ialah 3:1. Hitung bilangan yang dipengaruhi oleh

(a) hanya kedua-dua faktor keluarga dan media massa,

(b) hanya media massa,

(c) masyarakat.

12. Persatuan Sejarah telah memperkenalkan permainan tradisional kepada 40 orang ahlinya. Sebanyak 17 orang bermain ceper, 25 orang bermain batu seremban, 18 orang bermain congkak, 8 orang bermain ceper dan batu seremban, 12 orang bermain batu seremban dan congkak, dan 3 orang bermain ceper, congkak dan batu seremban.



Jika bilangan ahli yang hanya bermain batu seremban ialah dua kali bilangan ahli yang hanya bermain congkak, hitung bilangan ahli

(a) yang bermain batu seremban sahaja,

(b) yang bermain kedua-dua permainan ceper dan congkak,

(c) yang bermain ceper sahaja,

(d) yang tidak melibatkan diri dalam permainan tradisional.

13. Kajian terhadap 80 orang murid tentang penggunaan jenis pengangkutan ketika balik ke kampung menunjukkan sebanyak 25 orang murid menaiki kereta api dan 48 orang murid menaiki kereta api atau kereta. Jika 7 orang murid menaiki kereta api dan kereta, 5 orang murid menaiki bas dan kereta api serta 2 orang murid menggunakan ketiga-tiga pengangkutan tersebut, berapakah bilangan murid yang menaiki bas atau kereta api sahaja?

PROJEK

Bincangkan tiga bidang kerjaya yang akan menjadi pilihan anda pada masa hadapan.

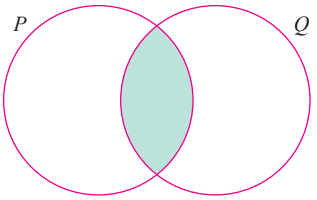
1. Senaraikan tiga bidang kerjaya tersebut.
2. Berikan contoh pekerjaan dalam bidang kerjaya tersebut.
3. Apakah mata pelajaran yang penting dalam bidang kerjaya tersebut? Terangkan jawapan anda dengan bantuan gambar rajah Venn.

PETA KONSEP

Operasi Set

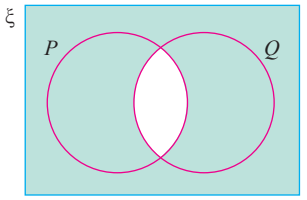
Persilangan Set

Persilangan set P dan set Q ditulis menggunakan simbol $\cap$. $P \cap Q$ bermaksud kedua-dua set P dan set Q mempunyai unsur yang sepunya.



$P \cap Q$

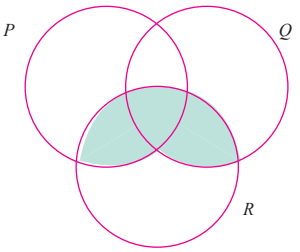
Pelengkap bagi persilangan set P dan set Q bermaksud semua unsur yang bukan dalam persilangan set P dan set Q.



$(P \cap Q)'$

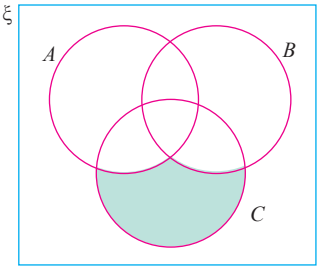
Gabungan Operasi Set

Gabungan operasi set melibatkan kedua-dua persilangan set $(\cap)$ dan kesatuan set $(\cup)$ pada masa yang sama.



$(P \cup Q) \cap R$

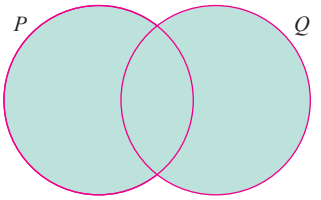
Pelengkap bagi gabungan operasi set melibatkan pelengkap bagi salah satu persilangan set $(\cap)$ atau kesatuan set $(\cup)$ atau kedua-dua persilangan set $(\cap)$ dan kesatuan set $(\cup)$ pada masa yang sama.



$(A \cup B)' \cap C$

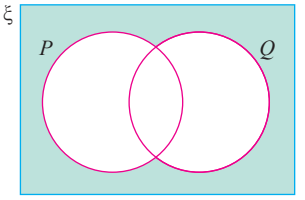
Kesatuan Set

$P \cup Q$ mewakili semua unsur dalam set P, set Q atau kedua-dua set P atau set Q.



$P \cup Q$

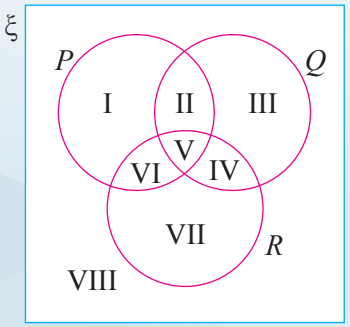
Pelengkap bagi kesatuan set P atau set Q bermaksud semua unsur yang bukan dalam set P atau set Q.



$(P \cup Q)'$

Refleksi Kendiri

Gambar rajah Venn menunjukkan set semesta ξ, set P, set Q dan R dengan kawasan-kawasan berlabel. Jawab semua soalan yang diberikan dengan menyatakan kawasan yang mewakilinya.



1. P mewakili kawasan I, II, V, VI
2. Q'
3. R
4. $P \cap Q$
5. $Q \cap R$
6. $P \cap Q \cap R$
7. $(P \cap Q \cap R)'$
8. $P \cap (Q \cup R)$
9. $Q \cap (P \cup R)$
10. $P \cup (Q \cap R)$
11. $P \cup (Q \cap R)'$
12. $Q \cup (P \cap R)'$
13. $P \cup Q \cup R$
14. $(P \cup Q \cup R)'$
15. $P' \cap (Q \cup R)$
16. $Q' \cap (P \cap R)'$
17. $R' \cup (P \cap Q)'$
18. $(P \cap Q) \cup (Q \cap R)$
19. $(P \cap Q)' \cup (Q \cap R)$
20. $(P \cap Q)' \cup (Q \cup R)'$

Eksplorasi Matematik

Berdasarkan piramid makanan yang diberikan, lukis dua gambar rajah Venn yang menunjukkan makanan seimbang untuk sarapan, makan tengah hari dan makan malam.

Langkah

1. Bahagikan murid kepada beberapa kumpulan yang sesuai.
2. Pilih makanan yang perlu untuk sarapan, makan tengah hari dan makan malam.
3. Lukis gambar rajah Venn mengikut makanan yang dipilih daripada piramid makanan. Diberi
   K = {sarapan},
   L = {makan tengah hari} dan
   M = {makan malam}.
4. Bentangkan hasil kerja kumpulan anda dengan menggunakan kaedah *Three stray, one stay*.
5. Berikan pandangan anda tentang kesesuaian pilihan makanan kumpulan lain dalam kelas untuk sarapan, makan tengah hari dan makan malam.

Piramid Makanan

BAB 5

Rangkaian dalam Teori Graf

Anda akan mempelajari

- Rangkaian

Sistem pengangkutan di Malaysia yang terdiri daripada pengangkutan darat, air dan udara sedang membangun seiring dengan kemajuan negara. Sistem pengangkutan darat, terutamanya pengangkutan awam membangun dengan pesatnya mengikut pertambahan bilangan pengguna terutamanya di bandar-bandar besar. Perkhidmatan rel bandaran seperti *Light Rail Transit* (LRT), *Mass Rapid Transit* (MRT), monorel dan tren komuter di kawasan bandar merupakan antara sistem pengangkutan awam yang kian mendapat sambutan baik daripada pengguna.

Tahukah anda sistem pengangkutan juga merupakan sejenis rangkaian?

Maslahat Bab

Rangkaian digunakan untuk mengaitkan objek-objek dalam bidang yang sama berdasarkan kehendak bidang tersebut. Rangkaian digunakan secara meluas dalam bidang pengangkutan, komputer, sosial, perniagaan, perubatan, sains, neurosains, sains sosial, penyiasatan, permainan dan sebagainya.

JARINGAN KATA

• berpemberat	• *weighted*
• bucu	• *vertex*
• darjah	• *degree*
• diskret	• *discrete*
• gelung	• *loop*
• graf	• *graph*
• mudah	• *simple*
• pokok	• *tree*
• rangkaian	• *network*
• subgraf	• *subgraph*
• tepi	• *edge*
• terarah	• *directed*

Imbasan Silam

Leonhard Euler
(1707-1783)

Leonhard Euler ialah salah seorang ahli matematik abad ke-18 yang dilahirkan di Basel, Switzerland. Pada tahun 1735, Euler menyelesaikan masalah matematik dan logik yang tidak jelas, yang dikenali sebagai Masalah Tujuh Jambatan Königsberg dan menghasilkan struktur matematik yang dipanggil graf, sebuah gambar yang terdiri daripada titik-titik (bucu) yang disambungkan oleh garis atau lengkung (tepi).

http://yakin-pelajar.com/Euler/5.pdf

5.1 Rangkaian

Standard Pembelajaran

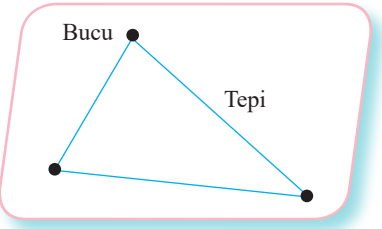
Mengenal dan menerangkan rangkaian sebagai graf.

Apakah kaitan antara rangkaian dengan graf?

Semasa di Tahun 5, anda telah diperkenalkan dengan sistem rangkaian berkaitan dengan komputer dan dunia Internet melalui mata pelajaran Teknologi Maklumat dan Komunikasi.

Hubung kait antara sekumpulan komputer dengan peranti berkaitan, iaitu rangkaian komputer membolehkan pencarian, penggunaan dan perkongsian maklumat dilakukan dengan mudahnya. Tahukah anda apakah kaitan antara rangkaian dengan graf?

Graf digunakan untuk mewakilkan data yang terdiri daripada objek diskret dan menggambarkan kaitan antara objek tersebut secara grafik yang mudah difahami. Dalam bidang matematik khususnya teori graf, **graf** ditafsirkan sebagai suatu siri bintik sama ada berkait atau tidak antara satu sama lain melalui garis. Bintik dikenali sebagai **bucu** dan garis yang mengaitkan dua bucu ialah **tepi**.



Graf juga sering digunakan untuk mewakilkan suatu rangkaian. **Rangkaian** merupakan sebahagian daripada graf dengan keadaan bucu dan tepi mempunyai sifat tersendiri. Struktur data rangkaian mempunyai hubungan banyak kepada banyak. Contoh graf yang melibatkan rangkaian adalah seperti yang berikut.

Rangkaian pengangkutan darat

Bucu
Kawasan, pekan, bandar atau sesuatu bangunan yang dikaitkan

Tepi
Jalan raya, lebuh raya atau landasan kereta api

Rangkaian sosial

Bucu
Individu, kumpulan atau organisasi

Tepi
Jenis hubungan seperti kawan, rakan sekerja atau keluarga

ZON INFORMASI

Sistem Rangkaian Sejuk (*Cold Chain System*) ialah sejenis sistem dalam dunia perubatan. Sistem ini berfungsi untuk mengangkut, mengedar dan menyimpan vaksin serta darah dalam julat suhu yang tetap bermula dari tempat asal ke tempat penggunaan.

Tatatanda graf merupakan set pasangan tertib iaitu $G = (V, E)$ dengan keadaan;

- V ialah set bintik atau bucu.
  $V = \{v_1, v_2, v_3, \ldots v_n\}$
- E ialah set tepi atau garis yang menghubungkan sepasang bucu.
  $E = \{e_1, e_2, e_3, \ldots e_n\}$
  $E = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots (a_n, b_n)\}$; a dan b ialah pasangan bucu.

Darjah, ***d*** ialah bilangan tepi yang mengaitkan dua bucu. Bilangan darjah suatu graf ialah dua kali bilangan tepi, iaitu;

$$\Sigma d(v) = 2E;\ v \in V$$

ZON INFORMASI

G = Graf (*graph*)
v = Bucu (*vertices*) atau bintik.
e = Tepi (*edge*) atau garis atau lengkung.
d = Darjah (*degree*)
Σ = Jumlah

MEMORI SAYA

$\in$ ialah unsur

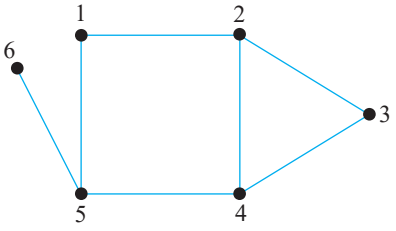
Apakah yang anda faham tentang graf mudah?

Graf mudah ialah graf yang tidak mengandungi gelung atau berbilang tepi. Bilangan darjah ialah dua kali bilangan tepi.

Contoh 1

Berdasarkan graf mudah di sebelah, tentukan

(a) V dan $n(V)$
(b) E dan $n(E)$
(c) bilangan darjah.



Penyelesaian:

(a) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ← Set bucu
$n(V) = 6$ ← Bilangan bucu

(b) $E = \{(1, 2), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 5), (5, 6)\}$ ← Set pasangan bucu
$n(E) = 7$ ← Bilangan tepi

(c) Bilangan darjah
$\Sigma d(v) = 2(E)$
$= 2(7)$
$= 14$

Bilangan darjah: $d(1) = 2$
$d(2) = 3$
$d(3) = 2$
$d(4) = 3$
$d(5) = 3$
$d(6) = 1$
Jumlah = 14

Darjah bucu 1 ialah dua iaitu tepi yang mengaitkan bucu 1 dengan bucu 2 dan bucu 1 dengan bucu 5

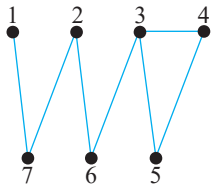
ZON INFORMASI

Tepi untuk pasangan bucu (1, 2) adalah sama dengan pasangan bucu (2, 1).

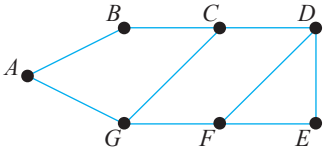
Contoh 2

Nyatakan bilangan bucu, tepi dan darjah bagi graf mudah berikut:

(a)



(b)



Penyelesaian:

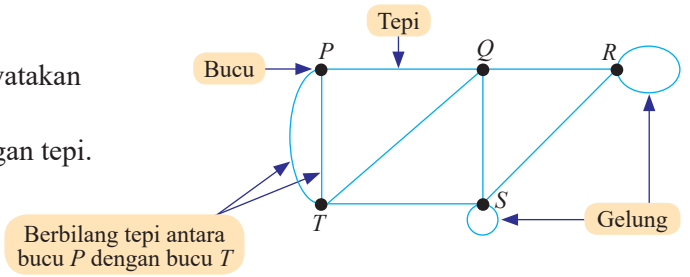
(a) Bucu = 7
Tepi = 7
Darjah = 2 × Tepi
= 2 × 7
= 14

(b) Bucu = 7
Tepi = 9
Darjah = 2 × Tepi
= 2 × 9
= 18

Apakah maksud berbilang tepi dan gelung pada graf?

Berbilang tepi

- Melibatkan dua bucu.
- Kaitan antara dua bucu tersebut dinyatakan melalui lebih daripada satu tepi.
- Bilangan darjah ialah dua kali bilangan tepi.



Gelung

- Melibatkan satu bucu.
- Tepi berbentuk lengkung atau bulatan yang berbalik kepada bucu asal.
- Bilangan darjah setiap gelung ialah dua.

Katakan, graf di sebelah ditulis dalam bentuk set pasangan tertib, $G(V, E)$, maka,

$V = \{A, B, C, D\}$

$E = \{(A, B), (A, B), (B, C), (B, C), (C, D), (B, D), (A, D), (D, D)\}$

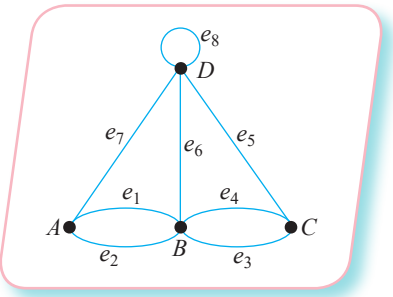
Berbilang tepi: $(A, B), (A, B), (B, C), (B, C)$

Gelung: (D, D)

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$

Tepi AB yang kedua: e_2

Tepi AB yang pertama: e_1



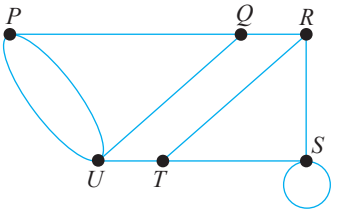
Contoh 3

Rajah di sebelah menunjukkan suatu graf yang mempunyai gelung dan berbilang tepi. Nyatakan

(a) V dan $n(V)$

(b) E dan $n(E)$

(c) bilangan darjah.



Penyelesaian:

(a) $V = \{P, Q, R, S, T, U\}$
$n(V) = 6$

(b) $E = \{(P, Q), (P, U), (P, U), (Q, R), (Q, U), (R, S), (R, T), (S, S), (S, T), (T, U)\}$
$n(E) = 10$

MEMORI SAYA

V = Set bucu (*Vertex*)
E = Set tepi (*Edge*)

(c) Bilangan darjah = 20

Bucu P = 3
Bucu Q = 3
Bucu R = 3
Bucu S = 4
Bucu T = 3
Bucu U = 4

Jumlah bilangan darjah ialah 20

TIP

Bilangan darjah setiap gelung ialah dua, iaitu pusingan mengikut arah jam dan pusingan mengikut lawan arah jam.

Contoh 4

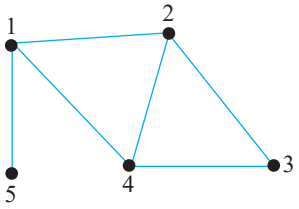
Lukis satu graf mudah mengikut maklumat yang diberikan.

(a) $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$E = \{(1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

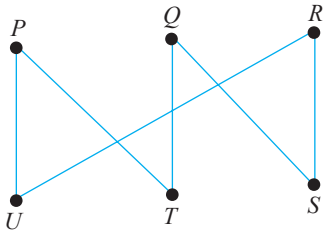
(b) $V = \{P, Q, R, S, T, U\}$
$E = \{(P, U), (P, T), (Q, T), (Q, S), (R, S), (R, U)\}$

Penyelesaian:

(a)



(b)



Contoh 5

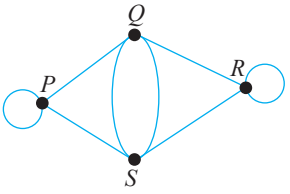
Lukis satu graf berbilang tepi dan mempunyai gelung mengikut maklumat yang diberikan.

(a) $V = \{P, Q, R, S\}$
$E = \{(P, P), (P, Q), (P, S), (Q, S), (Q, S), (Q, R), (S, R), (R, R)\}$

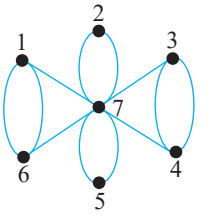
(b) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$E = \{(1, 6), (1, 6), (2, 7), (2, 7), (5, 7), (5, 7), (3, 4), (3, 4), (1, 7), (6, 7), (3, 7), (4, 7)\}$

Penyelesaian:

(a)



(b)



TIP

- Pasangan bucu gelung berbentuk (a, a).
- Pasangan bucu berbilang tepi berbentuk (a, b) dan (a, b).

Contoh 6

Tentukan sama ada suatu graf boleh dilukis bagi bilangan darjah yang diberikan.

(a) 3, 2, 2, 1, 3

(b) 2, 1, 1, 3, 3, 2

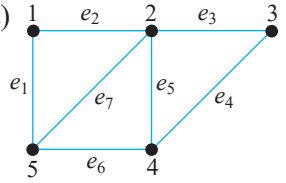
Penyelesaian:

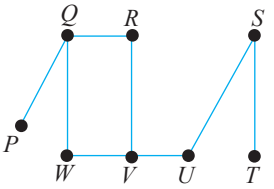
(a) Jumlah darjah = 3 + 2 + 2 + 1 + 3
= 11
Graf tidak boleh dilukis kerana jumlah darjah adalah ganjil.

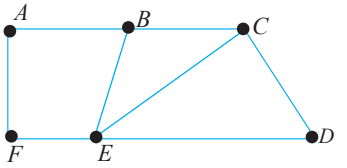
(b) Jumlah darjah = 2 + 1 + 1 + 3 + 3 + 2
= 12
Graf boleh dilukis kerana jumlah darjah adalah genap.

Praktis Kendiri 5.1a

1. Diberi tiga graf mudah.

(a) 

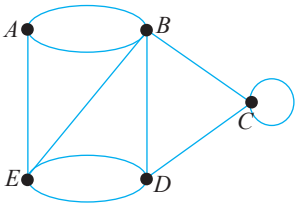
(b) 

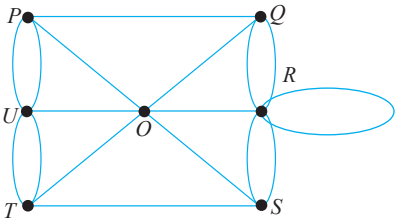
(c) 

Bagi setiap graf, tentukan

(i) V dan $n(V)$ (ii) E dan $n(E)$ (iii) bilangan darjah

2. Diberi dua graf berbilang tepi dan graf yang mempunyai gelung.

(a) 

(b) 

Bagi setiap graf, tentukan

(i) V dan $n(V)$ (ii) E dan $n(E)$ (iii) bilangan darjah

3. Lukis satu graf mudah mengikut maklumat yang diberikan.

(a) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$E = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (5, 6)\}$

(b) $V = \{P, Q, R, S, T, U\}$
$E = \{(P, U), (P, T), (Q, U), (Q, T), (Q, R), (R, S), (R, T), (S, T)\}$

4. Lukis satu graf berbilang tepi dan mempunyai gelung mengikut maklumat yang diberikan.

(a) $V = \{P, Q, R, S\}$
$E = \{(P, S), (P, S), (Q, R), (Q, R), (P, P), (S, S), (Q, Q), (R, R), (P, Q), (R, S)\}$

(b) $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$E = \{(1, 5), (1, 5), (3, 5), (3, 5), (1, 1), (3, 3), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5)\}$

5. Lukis graf mudah bagi bilangan darjah yang diberikan.

(a) 2, 3, 2, 3, 4 (b) 1, 2, 3, 3, 3, 2

6. Lukis graf yang mempunyai gelung dan berbilang tepi bagi bilangan darjah yang diberikan.

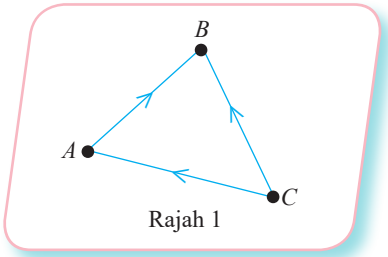
(a) 3, 3, 4 (b) 2, 2, 4, 6, 6

Apakah beza antara graf terarah dengan graf tak terarah?

Standard Pembelajaran

Membanding beza
- Graf terarah dengan graf tak terarah.
- Graf berpemberat dengan graf tak berpemberat.

Graf terarah ialah graf dengan keadaan tepi yang mengaitkan dua bucu ditanda dengan arah kaitan. Graf terarah biasanya digunakan untuk mewakilkan aliran suatu proses, peta jalan raya, peta penerbangan, litar elektrik, rangkaian komputer, carta organisasi dan sebagainya.



Rajah 1

ZON INTERAKTIF

Sistem peredaran darah dalam badan manusia juga dikategorikan sebagai graf terarah. Mengapa?

Rajah 1 menunjukkan suatu graf mudah dan terarah.
Mengikut arah anak panah yang ditandakan, didapati bahawa,

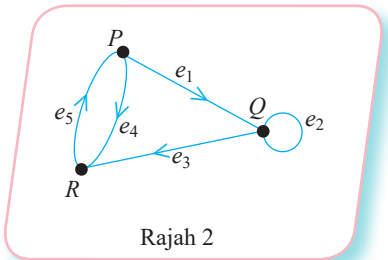
(a) bagi tepi AB, bucu A ialah bucu awal dan bucu B ialah bucu akhir.

(b) bagi tepi BC, bucu C ialah bucu awal dan bucu B ialah bucu akhir.

(c) semua bucu dikaitkan dengan satu arah sahaja.

ZON INTERAKTIF

Bagi rangkaian tenaga elektrik, stesen jana kuasa, stesen transformer, pencawang serta pengguna ialah bucu dan kabel serta wayar berperanan sebagai tepi. Adakah rangkaian tenaga elektrik merupakan graf terarah atau graf tak terarah? Bincangkan.



Rajah 2

Rajah 2 menunjukkan graf terarah yang mempunyai gelung dan berbilang tepi. Mengikut arah anak panah yang ditandakan, didapati bahawa,

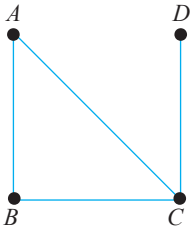
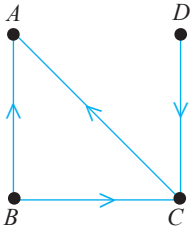
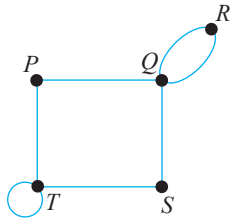
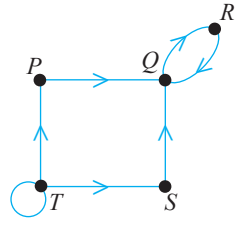
(a) $e_4 = (P, R)$; P ialah bucu awal dan R ialah bucu akhir.

(b) $e_5 = (R, P)$; R ialah bucu awal dan P ialah bucu akhir.

(c) $e_2 = (Q, Q)$; Q ialah bucu awal dan bucu akhir kerana e_2 merupakan sebuah gelung.

Graf tak terarah ialah graf mudah atau graf yang mempunyai gelung dan berbilang tepi yang dilukis tanpa penandaan arah pada tepi yang mengkaitkan dua bucu.

Beza antara graf terarah dengan graf tak terarah.

Jenis Graf	Graf	Set V dan Set E	Darjah
Graf mudah	Graf tak terarah 	$V = \{A, B, C, D\}$ $E = \{(A, B), (A, C), (B, C), (C, D)\}$ Penulisan kedudukan pasangan bucu adalah bebas. Kedua-dua pasangan bucu (A, B) atau (B, A) boleh mewakili tepi AB.	$d(A) = 2, d(B) = 2,$ $d(C) = 3, d(D) = 1$ $\Sigma d(V) = 8$
	Graf terarah 	$V = \{A, B, C, D\}$ $E = \{(B, A), (C, A), (B, C), (D, C)\}$ Penulisan kedudukan pasangan bucu adalah mengikut arah pada tepi. (B, A) dan (A, B) ialah set pasangan bucu yang mewakili tepi yang berlainan.	$d_{in}(A) = 2$ dan $d_{out}(A) = 0$ Maka, $d(A) = 2 + 0$ $d(A) = 2$ $d_{in}(A)$ bermaksud bilangan darjah bagi tepi yang masuk ke bucu A. $d_{out}(A)$ bermaksud bilangan darjah bagi tepi yang keluar dari bucu A. $d_{in}(B) = 0, d_{out}(B) = 2$ $d_{in}(C) = 2, d_{out}(C) = 1$ $d_{in}(D) = 0, d_{out}(D) = 1$ $\Sigma d(V) = 8$
Graf yang mempunyai gelung dan berbilang tepi	Graf tak terarah 	$V = \{P, Q, R, S, T\}$ $E = \{(P, T), (P, Q), (Q, R), (Q, R), (Q, S), (S, T), (T, T)\}$	$d(P) = 2, d(Q) = 4$ $d(R) = 2, d(S) = 2$ $d(T) = 4$ $\Sigma d(V) = 14$
	Graf terarah 	$V = \{P, Q, R, S, T\}$ $E = \{(P, Q), (Q, R), (R, Q), (S, Q), (T, S), (T, T), (T, P)\}$	$d_{in}(P) = 1, d_{out}(P) = 1$ $d_{in}(Q) = 3, d_{out}(Q) = 1$ $d_{in}(R) = 1, d_{out}(R) = 1$ $d_{in}(S) = 1, d_{out}(S) = 1$ $d_{in}(T) = 1, d_{out}(T) = 3$ Gelung = 1 Gelung = 1 $(T, P) = 1$ $(T, S) = 1$ $\Sigma d(V) = 14$

Apakah beza antara graf berpemberat dengan graf tak berpemberat?

	Graf berpemberat	Graf tak berpemberat
Jenis graf	Graf terarah dan graf tak terarah.	Graf terarah dan graf tak terarah.
Tepi	Diberi nilai atau pemberat.	Tiada nilai atau pemberat yang dinyatakan.
Contoh	Tepi mewakili: • jarak di antara dua bandar. • masa yang diambil untuk suatu gerakan. • nilai arus suatu litar elektrik. • kos dan sebagainya.	Tepi mengaitkan maklumat: • hierarki jawatan dalam carta organisasi. • peta alir. • peta pokok. • peta buih.

Contoh 7

Lukis graf terarah mengikut maklumat yang diberikan.

(a) $V = \{P, Q, R, S, T, U\}$
$E = \{(P, Q), (P, R), (R, Q), (S, R), (S, Q), (S, T)\}$

(b) Mempunyai satu gelung pada bucu Q dan RS ialah berbilang tepi dengan keadaan
$d_{in}(P) = 1, d_{out}(P) = 1$
$d_{in}(Q) = 3, d_{out}(Q) = 2$
$d_{in}(R) = 0, d_{out}(R) = 3$
$d_{in}(S) = 3, d_{out}(S) = 1$

ZON INFORMASI

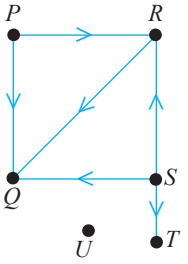
Bagi contoh 7(a) bucu U wujud dalam set V tetapi tidak dalam set E. Hal ini bermakna bucu U tidak berkaitan dengan bucu-bucu lain dan dikenali sebagai **bucu terpencil**.

Penyelesaian:

(a)

Pasangan bucu	**Arah**	
(P, Q)	P ke Q	Dua tepi dari bucu P
(P, R)	P ke R	
(R, Q)	R ke Q	Satu tepi dari bucu R
(S, R)	S ke R	Tiga tepi dari bucu S
(S, Q)	S ke Q	
(S, T)	S ke T	

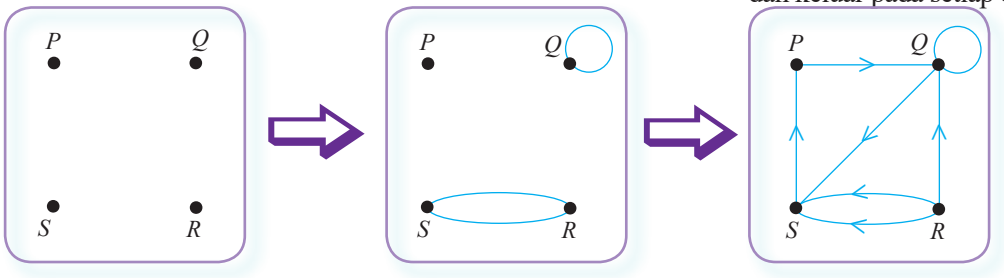
Bucu T hanya berkaitan dengan bucu S



(b) Jumlah bucu = 4

RS – berbilang tepi,
Gelung pada bucu Q.

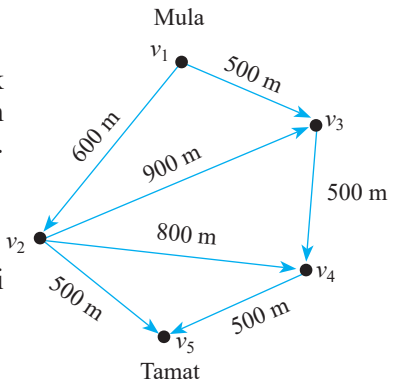
Lengkapkan graf mengikut bilangan tepi yang masuk dan keluar pada setiap bucu.



Contoh 8

Rajah di sebelah menunjukkan pilihan laluan sehala Izarul untuk menjalankan latihan larian. Bucu v_1 ialah tempat permulaan dan bucu v_5 ialah tempat terakhir sebelum dia balik ke rumah. Tentukan,

(a) jarak laluan sehala yang terpendek, dari v_1 ke v_5.
(b) jarak laluan sehala yang terpanjang, dari v_1 ke v_5.
(c) bucu-bucu yang perlu dilalui jika jarak larian sehala adalah di antara 1.4 km hingga 2.1 km.



Penyelesaian:

(a) Laluan sehala terpendek
$= v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_5$
$= (600 + 500)$ m
$= 1\,100$ m
$= 1.1$ km

(b) Laluan sehala terpanjang
$= v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_5$
$= (600 + 900 + 500 + 500)$ m
$= 2\,500$ m
$= 2.5$ km

(c) v_1, v_3, v_4, v_5 dan
v_1, v_2, v_4, v_5

Praktis Kendiri 5.1b

1. Nyatakan dua perbezaan antara graf terarah dengan graf tak terarah.

2. Apakah maksud pemberat pada graf berpemberat?

3. Lukis graf terarah mengikut maklumat yang diberikan.

(a) $V = \{P, Q, R, S, T, U, V\}$
$E = \{(P, Q), (Q, R), (Q, S), (S, P), (S, R), (S, T), (U, T)\}$

(b) (i) Mempunyai satu gelung pada bucu Q dan satu gelung pada bucu S.
(ii) QS ialah berbilang tepi.
(iii) $d_{in}(P) = 0$, $d_{out}(P) = 2$
$d_{in}(Q) = 4$, $d_{out}(Q) = 2$
$d_{in}(R) = 0$, $d_{out}(R) = 2$
$d_{in}(S) = 4$, $d_{out}(S) = 2$

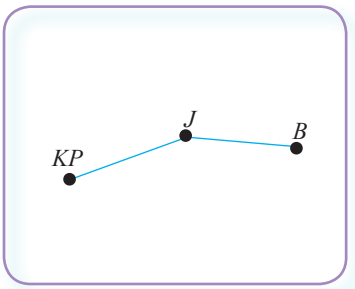
4. (a) Berdasarkan maklumat dalam Jadual 1 dan Jadual 2, lengkapkan graf berpemberat dan tak terarah yang diberikan.

Nama tempat	Bucu
Kuala Pilah	KP
Bahau	B
Rompin	R
Batu Kikir	BK
Juasseh	J

Jadual 1

Pasangan bucu	Pemberat (km)
(J, B)	11.6
(KP, R)	40
(B, R)	20.7
(B, BK)	11.4
(BK, J)	6.6
(KP, J)	9.3

Jadual 2



Graf tidak lengkap

(b) Encik Benny dan Encik Muruges memandu kereta masing-masing dari Kuala Pilah ke Rompin dengan keadaan:
(i) Encik Benny memandu mengikut jarak terpendek.
(ii) Encik Muruges memandu melalui Juasseh dan Bahau.
Hitung beza jarak, dalam km, perjalanan dari Kuala Pilah ke Rompin oleh Encik Benny dan Encik Muruges.

Bagaimanakah anda mengenal dan melukis subgraf dan pokok?

Apakah yang anda faham tentang subgraf?

Standard Pembelajaran
Mengenal dan melukis subgraf dan pokok.

Subgraf merupakan sebahagian atau keseluruhan suatu graf yang dilukis semula tanpa mengubah kedudukan asal bucu dan tepi.
Suatu graf H dikatakan subgraf kepada graf G jika,

(a) bucu-bucu graf H ialah subset kepada bucu-bucu graf G, iaitu $V(H) \subset V(G)$.
(b) tepi-tepi graf H ialah subset kepada tepi-tepi graf G, iaitu $E(H) \subset E(G)$.
(c) pasangan bucu setiap tepi graf H adalah sama dengan tepi graf G.

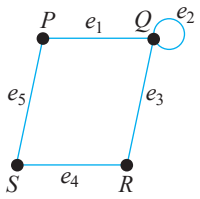
Secara ringkasnya,

- suatu bucu dalam graf G ialah subgraf bagi graf G.
- suatu tepi dalam graf G bersama bucu-bucu yang dikaitkan ialah subgraf bagi graf G.
- setiap graf ialah subgraf kepada dirinya.

ZON INFORMASI
Simbol $\subset$ juga boleh digunakan untuk subset.

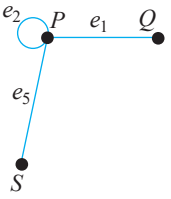
Contoh 9

Tentukan sama ada Rajah 1, Rajah 2, Rajah 3 dan Rajah 4 ialah subgraf bagi graf G.

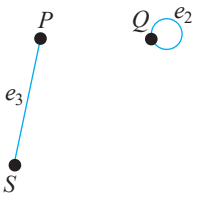


Graf G

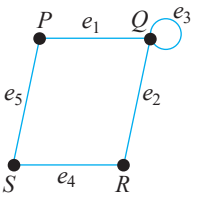
Rajah 1



Rajah 2



Rajah 3



Rajah 4

Penyelesaian:

Rajah 1 – Ya kerana pasangan bucu untuk tepi e_5 adalah sama.
$\{e_5\} \subset \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ dan $\{P, S\} \subset \{P, Q, R, S\}$

Rajah 2 – Tidak kerana kedudukan gelung e_2 bukan pada bucu Q.

Rajah 3 – Tidak kerana tepi yang mengaitkan bucu P dan bucu S adalah bukan e_3.

Rajah 4 – Tidak kerana tepi gelung dan tepi yang mengaitkan bucu Q dan bucu R adalah salah.

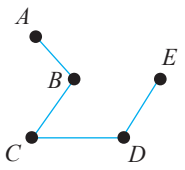
Apakah yang anda faham tentang pokok?

ZON INFORMASI
Sebutan pokok diperkenalkan oleh Arthur Cayley, seorang ahli Matematik Inggeris pada tahun 1857.

Pokok suatu graf ialah subgraf bagi graf tersebut dengan ciri-ciri berikut:

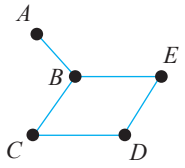
(a) Graf mudah iaitu tanpa gelung atau berbilang tepi.
(b) Semua bucu mesti berkait dan setiap pasangan bucu dikaitkan oleh satu tepi sahaja.
(c) Bilangan tepi = bilangan bucu – 1
Bilangan bucu = n
Bilangan tepi = $n - 1$

ZON INFORMASI
Carta salasilah keluarga ialah contoh pokok.



Rajah 1

Rajah 1 merupakan suatu pokok kerana,
- semua bucu berkait.
- setiap pasangan bucu dikaitkan oleh satu tepi sahaja.
- tidak ada gelung atau berbilang tepi.
- Bucu = 5, Tepi = 4.

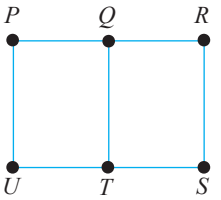


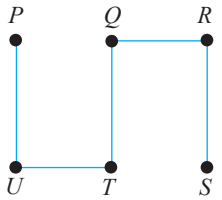
Rajah 2

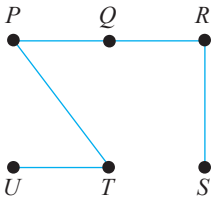
Rajah 2 bukan suatu pokok kerana,
- bucu B dan bucu E boleh dikaitkan dengan dua cara.
  (i) $B \rightarrow E$
  (ii) $B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$
- Bucu = 5, Tepi = 5.

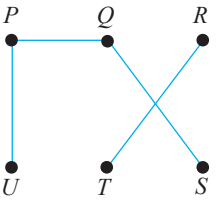
Contoh 10

Kenal pasti sama ada pokok atau bukan pokok untuk rajah di bawah. Berikan justifikasi anda.

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

Penyelesaian:

(a) Bukan pokok. Bucu = 6, tepi = 7. Setiap pasangan bucu boleh dikaitkan dengan pelbagai cara.
(b) Pokok. Bucu = 6, tepi = 5. Setiap pasangan bucu hanya dikaitkan oleh satu tepi.
(c) Pokok. Bucu = 6, tepi = 5. Setiap pasangan bucu hanya dikaitkan oleh satu tepi.
(d) Bukan pokok. Bucu = 6, tepi = 4. Bucu R dan bucu T tidak dikaitkan dengan bucu lain.

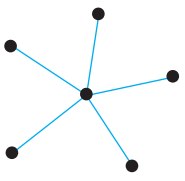
Contoh 11

Lukis satu pokok dengan maklumat yang diberi.

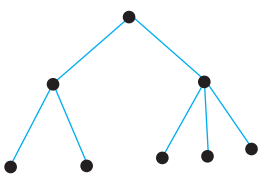
(a) Bucu = 6 (b) Bucu = 8 (c) Tepi = 4 (d) Tepi = 9

Penyelesaian:

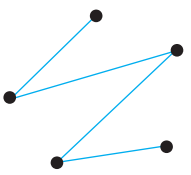
(a) Bucu = 6
Tepi = 5



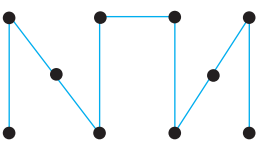
(b) Bucu = 8
Tepi = 7



(c) Tepi = 4
Bucu = 5

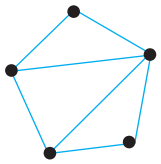


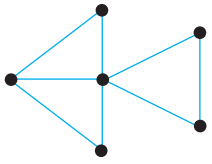
(d) Tepi = 9
Bucu = 10



Contoh 12

Lukis dua pokok berdasarkan graf yang diberikan di bawah.

(a) 

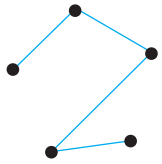
(b) 

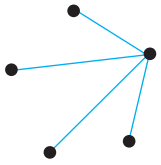
ZON INFORMASI

Pokok digunakan untuk menentukan laluan terpendek dengan syarat semua bucu dilalui hanya sekali.

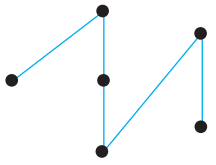
Penyelesaian:

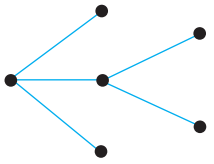
(a) Bucu = 5
Tepi = 7 (terlebih 3)

(i) 

(ii) 

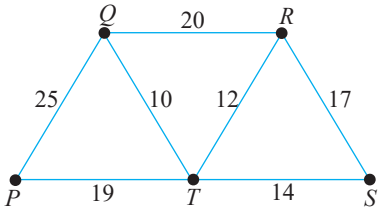
(b) Bucu = 6
Tepi = 8 (terlebih 3)

(i) 

(ii) 

Contoh 13

Rajah di bawah menunjukkan suatu graf tak terarah dan berpemberat. Lukis satu pokok dengan jumlah nilai pemberat yang minimum.

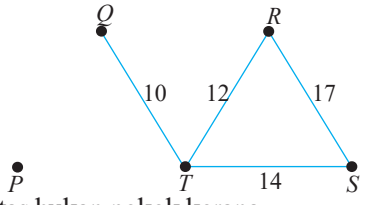


Penyelesaian:

Langkah 1

Bucu = 5, tepi = 7

- 3 tepi perlu dibuang.
- keluarkan tepi dengan pemberat nilai tertinggi (*PQ, QR, PT*)

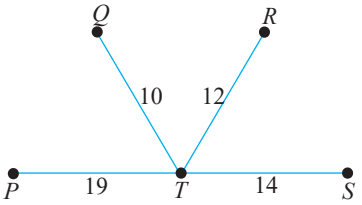


Graf di atas bukan pokok kerana,

- bucu *P* tidak dikaitkan dengan bucu lain.
- tiga tepi, *RS, ST* dan *RT* mengaitkan tiga bucu sahaja.

Langkah 2

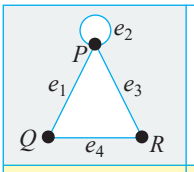
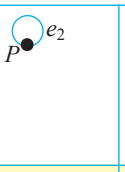
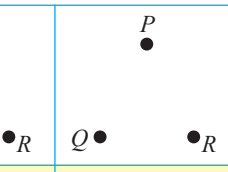
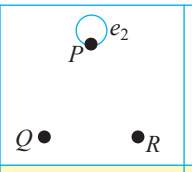
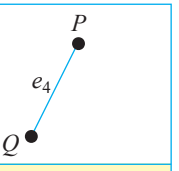
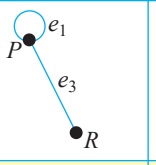
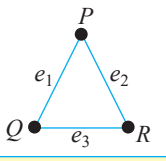
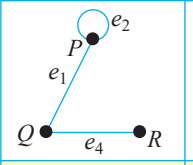
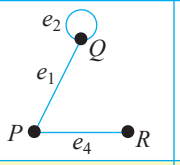
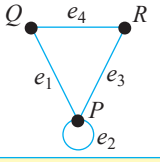
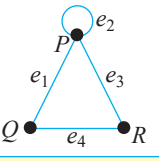
- Antara pemberat bernilai 19 dengan 25, pemberat bernilai 19 perlu dikekalkan kerana nilainya lebih rendah.
- Antara pemberat 12, 14 dengan 17, pemberat bernilai 17 perlu dikeluarkan.



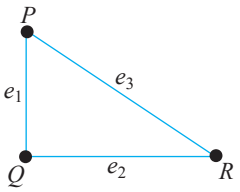
Graf yang terhasil ialah pokok.
Jumlah pemberat minimum pokok
= 10 + 12 + 14 + 19
= 55

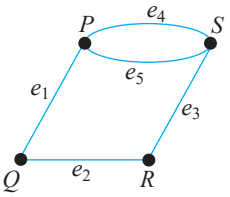
Praktis Kendiri 5.1c

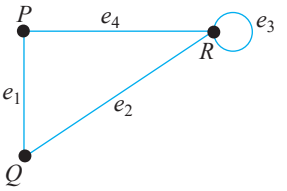
1. Tentukan sama ada rajah-rajah yang diberikan ialah subgraf bagi graf G.

					
Graf G	Rajah 1	Rajah 2	Rajah 3	Rajah 4	Rajah 5
					
Rajah 6	Rajah 7	Rajah 8	Rajah 9	Rajah 10	Rajah 11

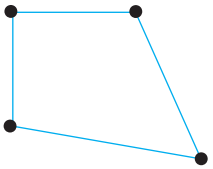
2. Lukis lima subgraf bagi graf-graf yang diberikan.

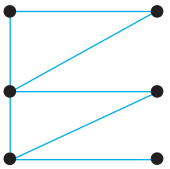
(a) 

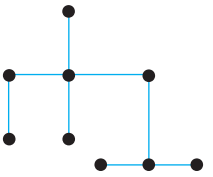
(b) 

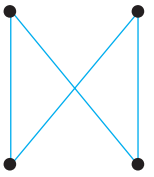
(c) 

3. Kenal pasti pokok dan bukan pokok daripada rajah-rajah di bawah.

(a) 

(b) 

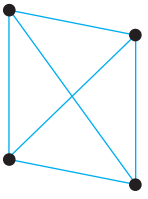
(c) 

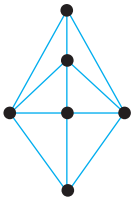
(d) 

4. Lukis satu pokok dengan maklumat yang diberikan.

(a) Bucu = 7 (b) Bucu = 9 (c) Tepi = 5 (d) Tepi = 9

5. Lukis dua pokok berdasarkan graf yang diberikan.

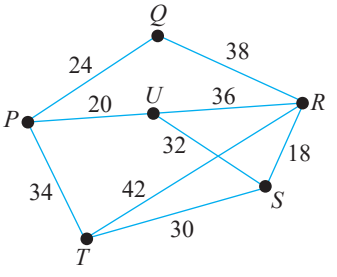
(a) 

(b) 

6. Rajah di sebelah menunjukkan suatu graf tak terarah dan berpemberat.

(a) Lukis satu pokok dengan jumlah nilai pemberat yang minimum.

(b) Berapakah jumlah pemberat minimum?



Bagaimanakah anda mewakilkan maklumat dalam bentuk rangkaian?

Standard Pembelajaran

Mewakilkan maklumat dalam bentuk rangkaian.

Rangkaian merupakan satu bentuk graf yang unik dan boleh digunakan untuk mewakilkan maklumat yang bertindih atau bersilang. Rangkaian digunakan secara meluas dan merangkumi hampir setiap bidang dalam kehidupan seharian. Rangkaian yang dilukis atau dipaparkan dalam bentuk grafik membolehkan perkaitan suatu maklumat atau struktur data mudah difahami.

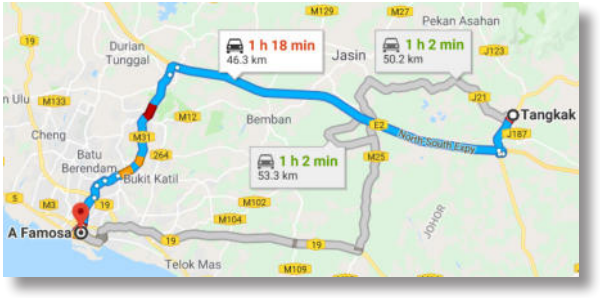
Rangkaian boleh dilukis sebagai:
- graf terarah dan berpemberat atau graf terarah dan tak berpemberat
- graf tak terarah dan berpemberat atau graf tak terarah dan tak berpemberat

Rangkaian Pengangkutan

Rangkaian pengangkutan boleh digambarkan dengan menggunakan graf berpemberat dan graf tak berpemberat. Pemberat boleh mewakili jarak, masa perjalanan atau kos perjalanan. Sistem navigasi terkenal dalam rangkaian pengangkutan dengan pemberat ialah Sistem Kedudukan Global atau lebih dikenali sebagai GPS (*Global Position System*).
Rajah di sebelah menunjukkan rangkaian transit kereta api yang terdapat di Kuala Lumpur Sentral (KL Sentral). Graf tak terarah ini merupakan satu contoh rangkaian pengangkutan dengan keadaan bucu mewakili nama stesen yang dikaitkan dan tepi mewakili jenis keretapi.

Contoh 14

Encik Voon bersama keluarganya bercadang untuk melawat tempat bersejarah di Melaka. Peta di sebelah menunjukkan tiga pilihan laluan beserta jarak dan anggaran masa yang akan diambil dari Tangkak ke bangunan A Famosa, Melaka.



Katakan, *P* ialah laluan berjarak 46.3 km, *Q* ialah laluan berjarak 50.2 km dan *R* ialah laluan berjarak 53.3 km. Pada pandangan anda, mengapakah laluan *P* mengambil jangka masa yang lebih panjang berbanding laluan lain walaupun jarak laluan pilihan *P* adalah yang terpendek?

Penyelesaian:

Laluan *P* mengambil jangka masa yang panjang mungkin kerana laluan tersebut melalui kawasan bandar yang sesak dan bilangan pengguna jalan raya yang lebih banyak berbanding dengan laluan lain.

Rangkaian Sosial

Rangkaian sosial merupakan salah satu rangkaian yang semakin popular terutamanya dalam kalangan remaja dan orang dewasa yang bekerja. Rangkaian sosial digunakan untuk peluang pekerjaan, peluang perniagaan, bersosial, kekeluargaan, pendidikan, media sosial, hubungan dengan masyarakat di seluruh dunia dan sebagainya.

Walaupun rangkaian sosial menjadi suatu platform utama untuk pelbagai aktiviti dan membawa kebaikan, anda sebagai seorang murid harus berhati-hati dan bersederhana dalam penggunaan rangkaian sosial agar tidak leka, terperdaya atau tertipu.

Celik Minda

Nyatakan contoh rangkaian sosial yang anda tahu.

ZON INTERAKTIF

Bincangkan kesan negatif penggunaan rangkaian sosial.

Contoh 15

Jadual di bawah menunjukkan data enam orang murid dan dua jenis permainan yang diminati. Tukar maklumat yang diberi dalam bentuk rangkaian.

Nama murid	Permainan
Edmund	Badminton, Catur
Azwan	Bola sepak, Sepak takraw
Rajan	Catur, Bola sepak
Aina	Catur, Bola jaring
Maria	Badminton, Bola jaring
Jenny	Bola jaring, Bola tampar

Celik Minda

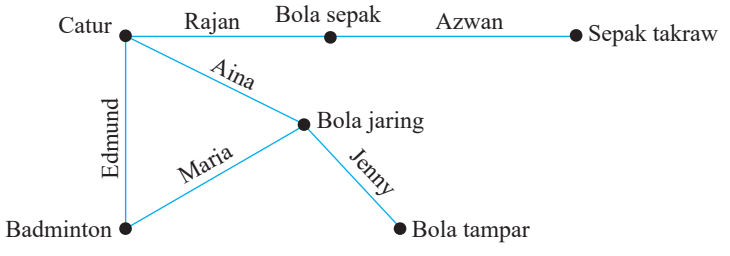
Apakah maksud LTE dan 4G yang sering digunakan dalam rangkaian Internet tanpa wayar?

ZON INTERAKTIF

Penyelesaian suatu kes jenayah juga berkaitan dengan graf. Semua bukti yang diperoleh dikaitkan antara satu dengan yang lain. Bincangkan maklumat yang boleh diwakilkan oleh bucu dan tepi.

Penyelesaian:

Katakan bucu ialah jenis permainan dan tepi mewakili nama murid.



TIP

Pilih maklumat yang tidak bersilang sebagai tepi.

ZON INTERAKTIF

Adakah rantaian makanan merupakan suatu rangkaian? Bincangkan.

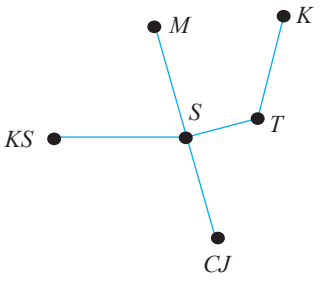
Praktis Kendiri 5.1d

Nama tempat	Bucu
Kuala Sepetang	*KS*
Matang	*M*
Kamunting	*K*
Simpang	*S*
Taiping	*T*
Changkat	*CJ*

Jadual 1

Pengesan bucu	Jarak (km)
(*KS*, *M*)	8
(*K*, *M*)	8.4
(*K*, *T*)	5.2
(*S*, *T*)	5.9
(*S*, *M*)	3.5
(*S*, *KS*)	11
(*CJ*, *S*)	4.9
(*CJ*, *KS*)	15
(*CJ*, *T*)	10

Jadual 2



Rajah 1

1. Jadual 1 dan Jadual 2 di atas menunjukkan nama dan jarak enam tempat di negeri Perak. Rajah 1 menunjukkan graf tak berarah yang tidak lengkap mengaitkan enam tempat tersebut.

(a) Lengkapkan Rajah 1 dengan melukis satu graf tak terarah dan berpemberat.
(b) Lukis satu pokok berpemberat minimum dengan keadaan setiap tempat hanya dilalui sekali sahaja.
(c) Berapakah jarak minimum pokok yang anda lukis?

2. Jadual di bawah menunjukkan empat jenis makanan kegemaran beberapa orang murid.

Makanan	Nama murid
Nasi ayam	Mervin, Raj, Helen, Wong, Ain
Nasi lemak	Mervin, Nurul, Atiqah, Ain, Puspa
Nasi goreng	Helen, Julia, Nurul, Faruk, Puspa
Mi goreng	Faruk, Atiqah, Raj, Wong, Julia

(a) Lukis satu graf berbilang tepi berdasarkan jadual di atas.
(b) Antara jenis makanan dengan nama murid, kumpulan manakah yang anda pilih untuk mewakili bucu? Berikan justifikasi anda.
(c) Apakah kaitan antara jumlah darjah bagi graf yang anda lukis dengan jumlah keseluruhan pilihan makanan?
(d) Antara grafik berbentuk jadual dengan graf, yang manakah jelas menunjukkan perkaitan antara jenis makanan dengan murid?

3. (a) Lukis carta organisasi kelas mengikut kreativiti anda.
(b) Nyatakan jenis graf yang anda gunakan. Adakah carta organisasi suatu rangkaian? Berikan justifikasi anda.

Bagaimanakah anda menyelesaikan masalah yang melibatkan rangkaian?

Standard Pembelajaran

Menyelesaikan masalah yang melibatkan rangkaian.

Contoh 16

Jadual di bawah menunjukkan pilihan pengangkutan awam, anggaran masa perjalanan dan anggaran kos dari Johor Bahru ke Kota Bharu.

Jenis pengangkutan	Masa perjalanan (sistem 24 jam)	Anggaran tempoh perjalanan	Anggaran perbelanjaan
			Harga tiket seorang / kos bahan api
Bas	Jam 2000	9 jam	RM64 - RM75
Kereta api	Jam (1833 - 1147)	17 jam	Kemudahan tempat tidur Kanak-kanak: RM32 - RM38 Dewasa: RM49 - RM55 Tanpa kemudahan tempat tidur Kanak-kanak: RM26 Dewasa: RM43
Kereta	-	9 jam	RM120 (untuk sebuah kereta)

Berdasarkan jadual di atas, tentukan jenis pengangkutan yang harus dipilih dalam situasi yang diberikan di bawah. Berikan justifikasi anda.

(a) Perjalanan yang melibatkan seorang dewasa tanpa kekangan masa.

(b) Perjalanan yang melibatkan seorang dewasa dengan kekangan masa.

(c) Perjalanan yang melibatkan dua orang dewasa dan dua orang kanak-kanak.

Penyelesaian:

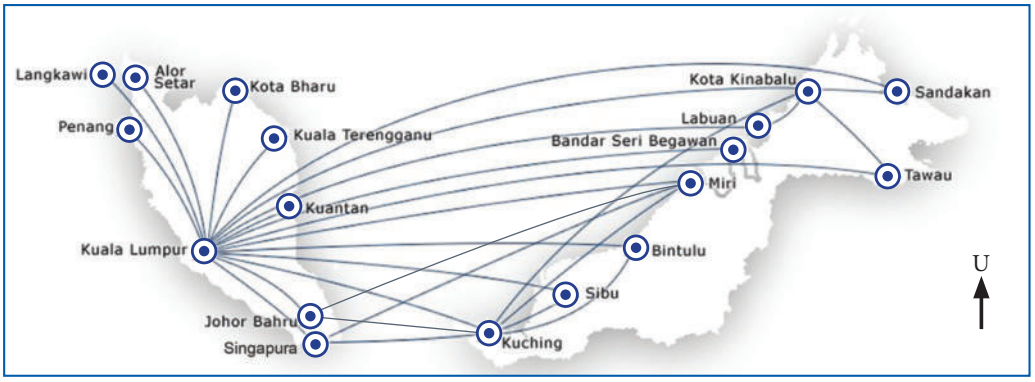
Jenis pengangkutan	Harga tiket seorang (RM)	
	Minimum	Maksimum
Bas	64	75
Kereta api (Kemudahan tempat tidur)	Kanak-kanak = 32 Dewasa = 49	Kanak-kanak = 38 Dewasa = 55
Kereta api (Tanpa kemudahan tempat tidur)	Kanak-kanak = 26 Dewasa = 44	-

(a) Kereta api dengan kemudahan tempat tidur ialah pilihan terbaik kerana kos perjalanan hanya beza RM5 berbanding dengan kereta api tanpa kemudahan tempat tidur. Pilihan ini juga lebih murah daripada perbelanjaan dengan memandu kereta.

(b) Bas merupakan pilihan terbaik kerana lebih jimat dan penumpang boleh berehat sepanjang perjalanan. Perjalanan jauh bagi seorang individu menggunakan kereta bukan satu pilihan bijak dari aspek keselamatan.

(c) Kereta ialah pilihan yang paling menjimatkan.

Contoh 17



Peta di atas menunjukkan laluan penerbangan domestik oleh sebuah syarikat penerbangan swasta di Malaysia.

(a) Encik Joshua bekerja di Kuala Lumpur. Beliau ingin melawat keluarganya di Kota Kinabalu. Nyatakan laluan penerbangan terbaik yang boleh dipilih oleh Encik Joshua.

(b) Apakah kelebihan dan kekurangan bagi pilihan penerbangan pada jawapan (a)?

Penyelesaian:

(a) Penerbangan terus dari Kuala Lumpur ke Kota Kinabalu atau dari Kuala Lumpur ke Labuan dan seterusnya ke Kota Kinabalu.

(b) Penerbangan terus dari Kuala Lumpur ke Kota Kinabalu boleh menjimatkan masa dan kos perjalanan. Penerbangan dari Kuala Lumpur ke Kota Kinabalu melalui Labuan akan mengambil masa perjalanan yang lebih panjang dan kemungkinan kos perjalanan juga lebih tinggi.

Praktis Kendiri 5.1e

1. Encik Maswi bekerja di Kulai. Beliau ingin melawat keluarganya di Miri pada suatu hujung minggu tertentu. Pada hari Jumaat, waktu bekerja Encik Maswi akan tamat pada pukul 12:30 tengah hari. Jadual di bawah menunjukkan pilihan laluan penerbangan domestik pada hari Jumaat dan hari Sabtu minggu tersebut oleh sebuah syarikat penerbangan swasta di Malaysia.

Laluan	Jumaat		Sabtu	
	Masa	Harga tiket	Masa	Harga tiket
Johor Bahru - Miri	Tiada penerbangan		Jam (1705 – 1900)	RM239.30
Johor Bahru - Kuching	Jam (1630 – 1755)	RM144.30	Jam (0605 – 0730)	RM174.30
	Jam (2000 – 2125)	RM124.30	Jam (1205 – 1330)	RM154.30
Kuching - Miri	Jam (2010 – 2115)	RM149.00	Jam (0835 – 0940)	RM84.00
	Jam (2155 – 2300)	RM149.00	Jam (1145 – 1250)	RM64.00

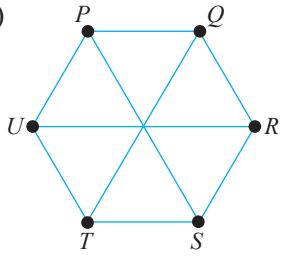
(a) Tentukan penerbangan yang paling murah dari Johor Bahru ke Miri.

(b) Tentukan pilihan penerbangan terbaik yang harus dipilih oleh Encik Maswi jika beliau perlu balik ke Semenanjung Malaysia pada hari Ahad. Berikan justifikasi anda.

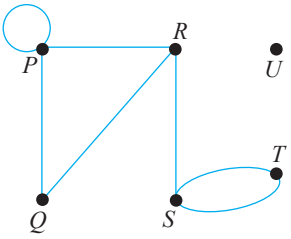
Praktis Komprehensif

1. Diberi tiga graf seperti di bawah.

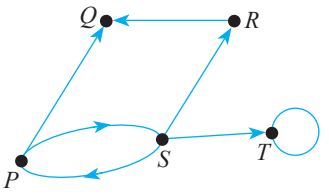
(a)



(b)



(c)



Untuk setiap graf, tentukan

(i) set V (ii) set E (iii) bilangan darjah

2. Lukis graf tak terarah berdasarkan maklumat yang diberikan.

(a) $V = \{P, Q, R, S, T, U\}$
$E = \{(P, Q), (Q, R), (R, S), (S, T)\}$

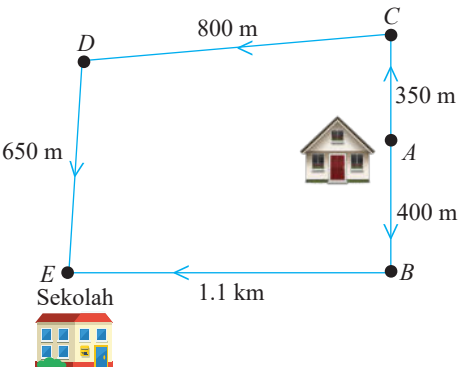
(b) $V = \{P, Q, R, S, T\}$
$E = \{(P, Q), (P, Q), (Q, R), (Q, T), (R, S), (S, S), (S, T)\}$

3. (a) Lukis satu graf tak terarah dan berpemberat mewakili jalan persekutuan yang menghubungkan beberapa buah bandar seperti dalam jadual di sebelah. Anda digalakkan menggunakan peta kawasan untuk menentukan kedudukan bandar-bandar yang diberikan.

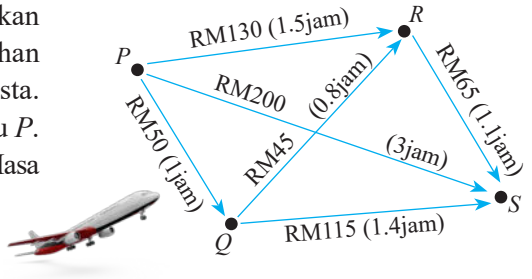
(b) Adakah graf yang anda lukis merupakan pokok? Berikan justifikasi anda.

Nama bandar	Jarak (km)
Temerloh – Mentakab	9.3
Temerloh – Bandar Bera	30.2
Bandar Bera – Teriang	4.9
Mentakab – Lanchang	21.1
Lanchang – Karak	21.9
Mentakab – Kuala Krau	34.6

4. Rajah di sebelah menunjukkan graf terarah dari rumah Lani di A, ke sekolah di E. Diberi tepi BE ialah jalan perbandaran dan tepi AB, AC, CD serta DE ialah jalan dalam kawasan perumahan. Cadangkan laluan terbaik yang boleh dipilih oleh Lani untuk ke sekolah dengan basikal. Berikan justifikasi anda.



5. Graf terarah dan berpemberat di sebelah menunjukkan bayaran tiket dan masa perjalanan bagi pilihan penerbangan oleh suatu syarikat penerbangan swasta. Diberi bucu S ialah destinasi yang ditujui dari bucu P. Bucu Q dan bucu R ialah lapangan terbang transit. Masa transit di setiap lapang terbang ialah 45 minit.



(a) Nyatakan,

(i) laluan yang paling murah.

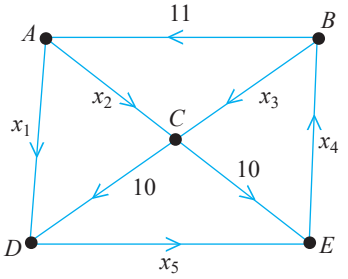
(ii) laluan yang mengambil masa perjalanan yang paling singkat.

(b) Jika anda perlu ke destinasi dengan kos yang optimum, nyatakan laluan yang anda pilih. Berikan justifikasi anda.

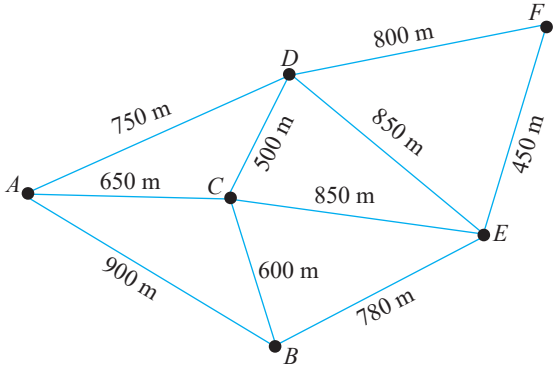
6. Bina empat persamaan linear berdasarkan graf terarah di bawah. Diberi $x_5 = 15$. Tentukan nilai x_1, x_2, x_3 dan x_4.

TIP

Guna, $\Sigma d_{in} = \Sigma d_{out}$ bagi setiap bucu.



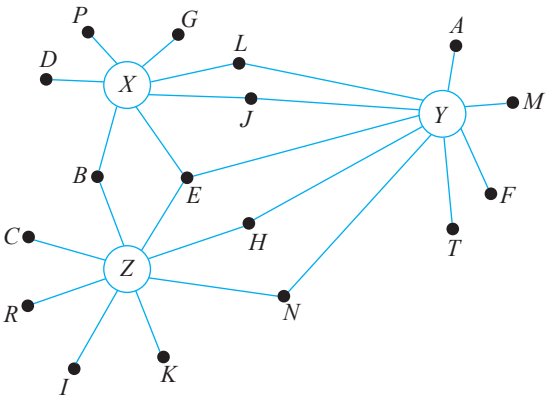
7. Graf tak terarah di bawah menunjukkan kedudukan enam buah rumah di sebuah kampung. Seorang jurujual perlu ke semua rumah tersebut bermula dari rumah A dan berakhir di rumah F.



(a) Lukis suatu graf terarah mewakili jarak terpendek dari A ke F dengan syarat semua laluan hanya dilalui sekali sahaja.

(b) Hitung jarak terpendek dalam km, berdasarkan graf yang anda lukis.

8. Graf di sebelah menunjukkan kaitan antara unsur-unsur yang terdapat dalam set X, set Y dan set Z, dengan keadaan set semesta, $\xi = X \cup Y \cup Z$.



(a) Wakilkan graf di sebelah dalam bentuk gambar rajah Venn.

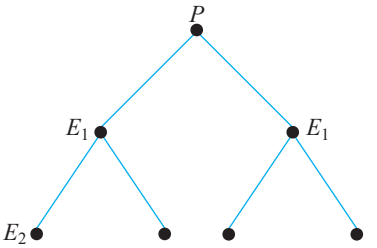
(b) Tentukan,

(i) $(X \cup Y)'$

(ii) $(X \cap Z)' \cap Y'$

(iii) $(Y \cap Z) \cap (X \cap Y)$

9. Encik Ganesan berjawatan sebagai pengurus sebuah agensi insurans. Beliau berjaya menyediakan dua orang ejen insurans yang aktif di bawah pimpinannya untuk menjual suatu skim insurans terkini, yang bernilai RM100 sebulan. Selain menjual polisi insurans, ejen-ejen tersebut juga perlu memperkenalkan minimum dua ejen baharu, setiap seorang untuk tujuan kenaikan pangkat. Pada rajah pokok di sebelah bucu P mewakili pengurus, E_1 sebagai ejen peringkat pertama, E_2 sebagai ejen peringkat kedua dan seterusnya.



(a) Jika terdapat 30 orang ejen pada bulan Januari, lengkapkan pokok yang diberikan.

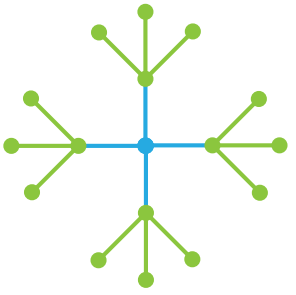
(b) Jadual di sebelah menunjukkan peratus komisen asas yang diterima oleh seorang ejen dan pengurus apabila satu polisi insurans berjaya dijual.

Ejen	25%
Pengurus	2%

(i) Hitung jumlah komisen asas yang diterima oleh Encik Ganesan pada bulan Januari, jika minimum polisi yang dijual oleh seorang ejen pada bulan Januari ialah 18 polisi.

(ii) Berapakah minimum polisi yang perlu dijual oleh seorang ejen agar komisen asas yang diterima adalah sekurang-kurangnya RM1 000?

10. Rajah di sebelah menunjukkan pertumbuhan sejenis sel. Diberi bahawa pada hari pertama terdapat empat sel. Pada hari kedua setiap sel membina tiga sel baharu. Proses pembinaan sel baharu ini berulang dengan kadar yang sama.



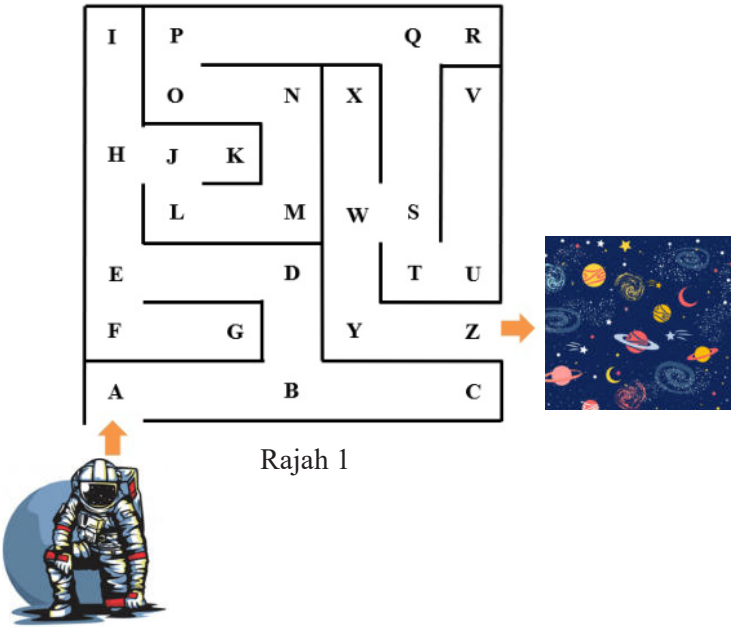
(a) Pada hari keberapakah jumlah sel melebihi 50 untuk kali pertama?

(b) Hitung jumlah sel pada hari kelima.

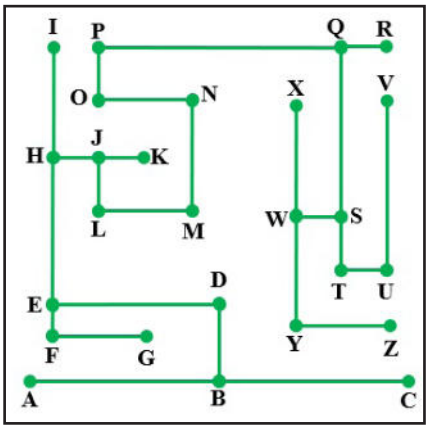
(c) Diberi jangka hayat sel ialah 5 hari. Hitung jumlah sel pada hari kelapan.

PROJEK

1. Permainan pagar sesat atau dikenali sebagai *Maze* merupakan satu contoh rangkaian. Rajah 1 menunjukkan contoh *Maze* sementara Rajah 2 ialah rangkaian yang sepadan.



Rajah 1



Rajah 2

2. Bahagikan kelas kepada beberapa kumpulan yang sesuai.

3. Dapatkan contoh permainan *Maze* pelbagai aras.

4. Labelkan bucu-bucu dengan tatatanda yang sesuai seperti pada Rajah 1.

5. Lukiskan rangkaian yang sepadan.

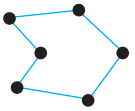
6. Pamerkan hasil projek anda di Sudut Matematik.

PETA KONSEP

Rangkaian dalam Teori Graf

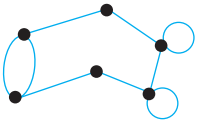
Graf

Mudah

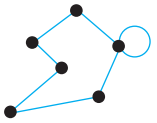


Darjah

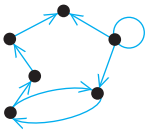
Mempunyai gelung dan berbilang tepi



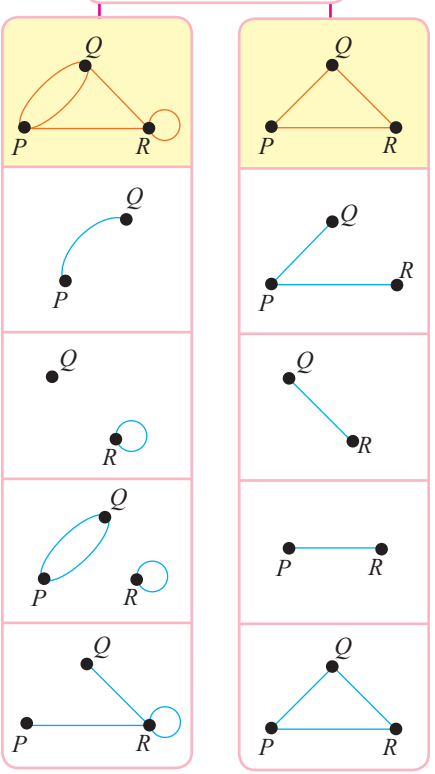
Graf tak terarah



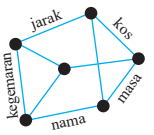
Graf terarah



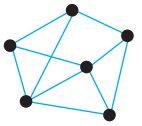
Subgraf



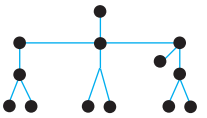
Graf berpemberat



Graf tak berpemberat



Pokok (Graf mudah)



Refleksi Kendiri

Lengkapkan pernyataan yang diberi dengan jawapan yang disediakan.

subgraf | graf berpemberat | darjah | graf mudah | graf terarah | tepi | pokok | gelung

1. _____ ialah garis yang mengaitkan dua bucu.
2. _____ ialah bilangan tepi yang mengaitkan dua bucu.
3. Graf tanpa _____ dan tanpa berbilang tepi dikenali sebagai _____.
4. Tepi _____ ditanda dengan arah.
5. Tepi _____ ditanda dengan suatu nilai atau maklumat.
6. _____ ialah sebahagian atau keseluruhan graf yang dilukis semula.
7. Setiap pasangan bucu pada suatu _____ hanya dikaitkan dengan satu tepi.

Eksplorasi Matematik

Dapatkan maklumat dan sediakan satu persembahan multimedia berkaitan salah satu rangkaian di bawah.

Sosial

Perubatan

Perbankan

Bahasa

Sains Komputer

Sertakan gambar, video atau bahan menarik agar persembahan anda lebih kreatif dan informatif.

Ketaksamaan Linear dalam Dua Pemboleh Ubah

Anda akan mempelajari

- Ketaksamaan Linear dalam Dua Pemboleh Ubah
- Sistem Ketaksamaan Linear dalam Dua Pemboleh Ubah

Perniagaan dan keusahawanan merupakan nadi utama ekonomi negara untuk menyediakan peluang pekerjaan dan meningkatkan taraf hidup rakyat. Seorang peniaga atau usahawan perlu mahir dalam komunikasi, kepimpinan, perakaunan, pemasaran dan yang paling penting ialah perancangan. Perancangan yang teliti membolehkan seorang peniaga atau usahawan mendapat pulangan yang tinggi iaitu keuntungan yang maksimum dengan kos yang minimum.

Tahukah anda bagaimanakah seorang usahawan merancang untuk mendapat keuntungan yang tinggi dengan meminimumkan perbelanjaan?

Maslahat Bab

Pengetahuan dalam ketaksamaan linear merupakan asas kepada bidang pengaturcaraan linear. Pengetahuan ini sangat penting dalam bidang perniagaan, dunia korporat dan bidang-bidang lain yang memerlukan hasil optimum, iaitu keuntungan maksimum dengan kos yang minimum.

JARINGAN KATA

- ketaksamaan linear — *linear inequality*
- linear — *linear*
- pemboleh ubah — *variable*
- rantau — *region*
- sistem ketaksamaan linear — *linear inequality system*

Imbasan Silam

Thomas Harriot
(1560-1621)

Thomas Harriot ialah seorang ahli astronomi Inggeris, ahli matematik dan penterjemah. Beliau memberikan sumbangan dalam kemajuan bidang saintifik. Thomas Harriot merupakan orang pertama yang memperkenalkan simbol ketaksamaan lebih besar, > dan lebih kecil, <.

http://yakin-pelajar.com/Harriot/6.pdf

6.1 Ketaksamaan Linear dalam Dua Pemboleh ubah

Bagaimanakah suatu situasi boleh diwakilkan dalam bentuk ketaksamaan linear?

Standard Pembelajaran

Mewakili situasi dalam bentuk ketaksamaan linear.

Ketaksamaan digunakan untuk menerangkan hubungan antara dua kuantiti yang tidak sama.

Rajah 1

Rajah 1 menunjukkan tanda amaran ketinggian yang biasa dilihat di jalan raya atau lebuh raya. Tanda amaran ini diletakkan pada terowong. Berapakah ketinggian maksimum kenderaan yang boleh melalui terowong tersebut?

MEMORI SAYA

- $>$ lebih besar daripada
- $<$ kurang daripada
- $\geqslant$ lebih besar daripada atau sama dengan
- $\leqslant$ kurang daripada atau sama dengan

Rajah 2 menunjukkan berat maksimum sebuah lori 3 tan dengan muatan dan tanpa muatan. Apakah hubungan antara berat lori tanpa muatan, berat lori dengan muatan serta berat muatan?

Rajah 2

Bagi situasi pada Rajah 1, katakan ketinggian keseluruhan suatu kenderaan diwakilkan dengan pemboleh ubah h, maka $h < 4.75$ m. Dalam situasi ini hanya satu kuantiti yang terlibat, iaitu ketinggian dalam meter.

Situasi pada Rajah 2 melibatkan kuantiti berat dalam kg tetapi pada dua keadaan yang berbeza. Katakan,

y = berat dengan muatan (BDM)
x = berat tanpa muatan (BTM)

nilai muatan = BDM – BTM
= (7 500 – 3 410) kg
= 4 090 kg

Maka, situasi pada Rajah 2 boleh dinyatakan sebagai

$$y \leqslant x + 4\,090$$

iaitu, x dan y ialah dua pemboleh ubah yang mewakili dua kuantiti dengan unit yang sama.

ZON INFORMASI

Pemboleh ubah merupakan suatu faktor seperti unsur, ciri atau angka yang tidak tetap dan perlu diambil kira dalam suatu perhitungan.

MEMORI SAYA

Kuasa tertinggi suatu pemboleh ubah dalam persamaan linear ialah 1.

MEMORI SAYA

Persamaan linear dalam dua pemboleh ubah:
$ax + by = c$

Contoh 1

Taufik ingin membeli beberapa buah buku rujukan dan buku latihan semasa pameran buku diadakan. Taufik mendapati harga sebuah buku rujukan ialah RM14 dan harga sebuah buku latihan ialah RM9. Amaun maksimum yang boleh dibelanjakan oleh Taufik ialah RM100. Wakilkan situasi di atas dalam bentuk ketaksamaan linear yang sesuai.

Penyelesaian:

Katakan, x = buku rujukan dan y = buku latihan.

maka,

$$\underbrace{14x}_{\text{Harga sebuah buku rujukan ialah RM14}} + \underbrace{9y}_{\text{Harga sebuah buku latihan ialah RM9}} \leqslant \underbrace{100}_{\text{Jumlah harga buku rujukan dan buku latihan kurang atau sama dengan RM100}}$$

Ketaksamaan linear $14x + 9y \leqslant 100$ juga boleh ditulis sebagai;

$$14x \leqslant 100 - 9y \text{ atau } 9y \leqslant 100 - 14x$$

Contoh 2

Puan Hidayah ingin membeli beberapa keping poster matematik untuk digantung di Bilik Matematik. Diberi harga sekeping poster kecil ialah RM12.50 dan harga sekeping poster besar ialah RM18.50. Wakilkan pembelian kedua-dua jenis poster dalam bentuk ketaksamaan linear yang sesuai jika peruntukan daripada pihak sekolah ialah RM150.00.

Penyelesaian:

Katakan,

k = poster kecil dan b = poster besar.

maka, $12.50k + 18.50b \leqslant 150$

$$\frac{25}{2}k + \frac{37}{2}b \leqslant 150$$

Darabkan kedua-dua bahagian ketaksamaan dengan 2 untuk menghapuskan penyebut pecahan:

$$2 \times \frac{25}{2}k + 2 \times \frac{37}{2}b \leqslant 2 \times 150$$

$$25k + 37b \leqslant 300$$

Praktis Kendiri 6.1a

1. Wakilkan situasi yang diberikan dalam bentuk ketaksamaan linear dengan menggunakan pemboleh ubah yang sesuai.

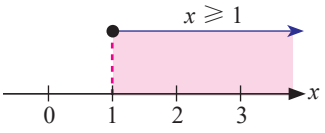
(a) Puan Linda Lim ingin menyediakan hidangan ikan dan udang bersempena dengan sambutan Tahun Baharu Cina. Diberi harga sekilo ikan tenggiri ialah RM25 dan harga sekilo udang ialah RM45. Puan Linda Lim ingin membelanjakan RM250 untuk pembelian ikan dan udang.

(b) Pak Halim ingin menternak ayam dan itik secara kecil-kecilan untuk menjanakan pendapatan sampingan bagi menguruskan perbelanjaan keluarganya yang semakin meningkat. Seekor anak ayam berharga RM2 dan harga seekor anak itik ialah RM1.50. Pak Halim mempunyai modal sebanyak RM500 untuk pembelian anak ayam dan anak itik.

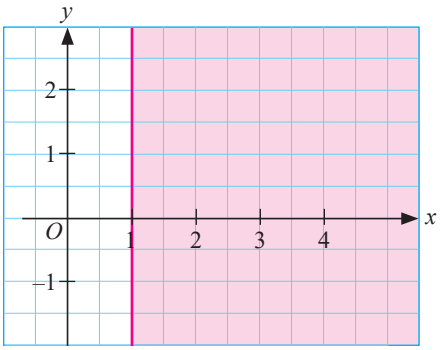
(c) Puan Letchumy ingin menyumbangkan RM50 untuk pembelian dua jenis kuih bersempena dengan Hari Kantin di sekolah anaknya. Harga kos sebiji karipap ialah 30 sen dan sebiji kuih kasturi ialah 40 sen.

(d) Puan Yati menjual nasi lemak. Harga jualan sebungkus nasi lemak telur ialah RM1.50 dan sebungkus nasi lemak ayam ialah RM3.50. Jumlah jualan harian nasi lemak perlu melebihi RM120 untuk mendapatkan keuntungan minimum.

Bagaimanakah anda menentusahkan konjektur titik dalam suatu rantau yang memenuhi suatu ketaksamaan linear?



Rajah 1



Rajah 2

Standard Pembelajaran

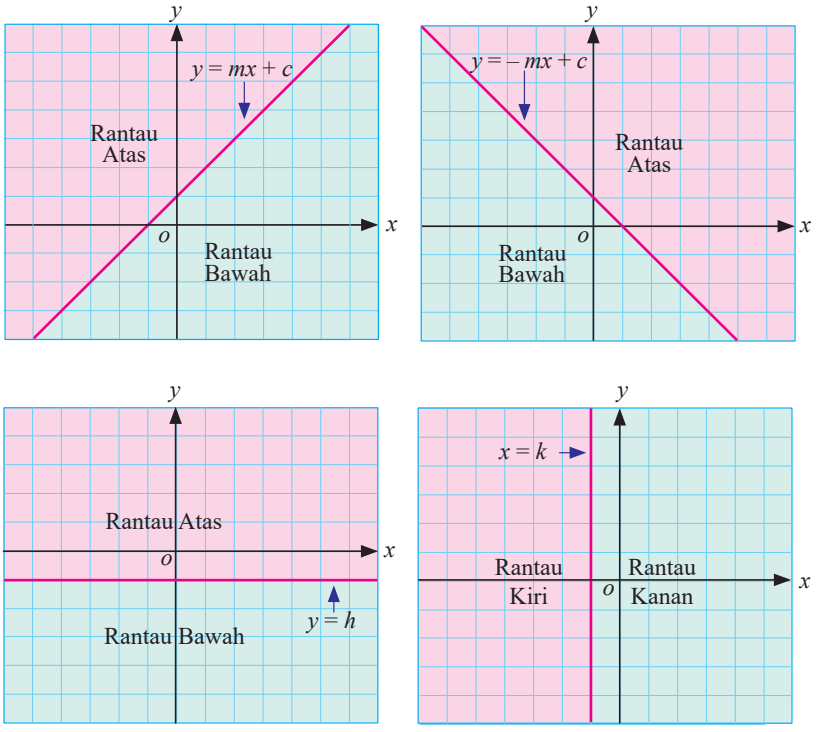
Membuat dan menentusahkan konjektur tentang titik dalam rantau dan penyelesaian bagi suatu ketaksamaan linear.

Semasa di tingkatan 1, anda telah mempelajari cara untuk mewakilkan suatu ketaksamaan dalam satu pemboleh ubah dengan menggunakan garis nombor seperti pada Rajah 1. Tahukah anda, suatu ketaksamaan juga boleh diwakilkan pada satah Cartes dengan melorek rantau yang memuaskan ketaksamaan tersebut seperti pada Rajah 2? Semua koordinat-x pada rantau berlorek tersebut akan memenuhi ketaksamaan $x \geqslant 1$.

TIP

Tanda Ketaksamaan	Jenis Garis
$>$, $<$	Garis sempang
$\geqslant$, $\leqslant$	Garis padu

Rajah 3 menunjukkan jenis rantau yang terhasil pada satah Cartes apabila suatu garis lurus dilukis.



Rajah 3

MEMORI SAYA

Persamaan am garis lurus:

$y = mx + c$
m = kecerunan
c = pintasan-y

Celik Minda

Kecerunan garis lurus $y = h$ ialah sifar. Mengapa?

ZON INTERAKTIF

Mengapakah kecerunan garis lurus $x = k$ adalah tidak tertakrif? Bincangkan.

Rangsangan Minda 1

Tujuan: Menentusahkan konjektur tentang titik dalam suatu rantau yang memuaskan ketaksamaan linear.

Bahan: Lembaran aktiviti, kertas graf

Imbas *QR Code* untuk menjalankan aktiviti ini.
http://yakin-pelajar.com/6/Lembaran.pdf

Langkah:

1. Bahagikan murid kepada beberapa kumpulan yang sesuai.
2. Setiap kumpulan diberi satu kertas graf dan lembaran aktiviti.
3. Murid diminta melukis garis lurus yang mewakili persamaan linear yang diberikan untuk $-5 \leqslant x \leqslant 5$ pada kertas graf dan memplot titik yang terdapat dalam jadual lembaran aktiviti (Contoh 1).

Titik	Koordinat-y	Nilai $x + 2$	Kedudukan titik (Dari graf)			Titik memuaskan		
			Pada garis lurus	Rantau Atas	Rantau Bawah	$y = x + 2$	$y > x + 2$	$y < x + 2$
$(-5, 4)$	4	$-5 + 2 = 3$		✓			$(4 > 3)$	
$(1, 3)$	3	$1 + 2 = 3$	✓			$(3 = 3)$		
$(0, -2)$	-2	$0 + 2 = 2$			✓			$(-2 < 2)$
$(4, 7)$								
$(-3, 0)$								
$(3, 5)$								

Contoh 1

4. Aktiviti *Stay and Stray* boleh dijalankan agar semua murid berpeluang menerangkan hasil dapatan.

Perbincangan:

Apakah kaitan antara kedudukan titik pada garis lurus, rantau atas atau rantau bawah dengan persamaan linear atau ketaksamaan linear yang diberikan?

Hasil daripada Rangsangan Minda 1, didapati bahawa;

- Semua titik yang berada pada garis lurus memuaskan persamaan $y = mx + c$.
- Semua titik yang berada di rantau atas memuaskan ketaksamaan $y > mx + c$.
- Semua titik yang berada di rantau bawah memuaskan ketaksamaan $y < mx + c$.

Contoh 3

Lukis garis lurus $y = -2x + 6$ untuk $-1 \leqslant x \leqslant 5$. Plotkan titik $(1, -2)$, $(4, -2)$, $(0, 1)$, $(1, 4)$, $(4, 3)$ dan $(2, 6)$. Tentukan sama ada titik-titik yang diplot memenuhi $y = -2x + 6$, $y > -2x + 6$ atau $y < -2x + 6$.

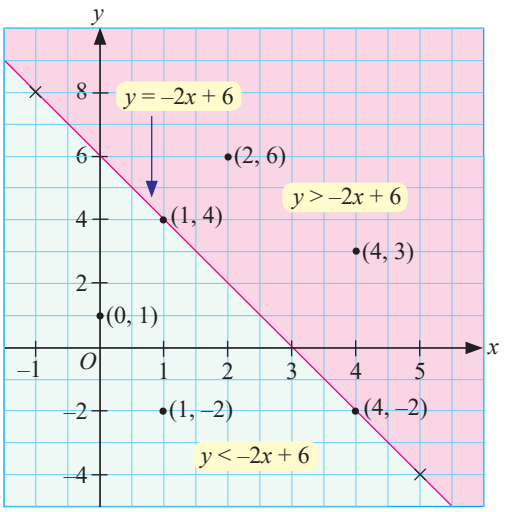
Penyelesaian:

$y = -2x + 6$

x	-1	5
y	8	-4

Apabila $x = -1$,
$y = -2(-1) + 6$
$y = 8$

Apabila $x = 5$,
$y = -2(5) + 6$
$y = -4$



- titik-titik (1, 4) dan (4, –2) memuaskan persamaan $y = -2x + 6$.
- titik-titik (2, 6) dan (4, 3) memuaskan ketaksamaan $y > -2x + 6$.
- titik-titik (0, 1) dan (1, –2) memuaskan ketaksamaan $y < -2x + 6$.

Contoh 4

Diberi persamaan linear $y = -3x + 6$. Tanpa melukis graf garis lurus, tentukan sama ada titik-titik yang diberikan memuaskan $y = -3x + 6$, $y > -3x + 6$ atau $y < -3x + 6$.

(a) (2, 5) (b) (1, 2) (c) (–1, 9) (d) (0, 8)

Penyelesaian:

(a) (2, 5)

y	$-3x + 6$
5	$-3(2) + 6$ $= 0$
$5 > 0$	
maka, titik (2, 5) memuaskan $y > -3x + 6$	

(b) (1, 2)

y	$-3x + 6$
2	$-3(1) + 6$ $= 3$
$2 < 3$	
maka, titik (1, 2) memuaskan $y < -3x + 6$	

(c) (–1, 9)

y	$-3x + 6$
9	$-3(-1) + 6$ $= 9$
$9 = 9$	
maka, titik (–1, 9) memuaskan $y = -3x + 6$	

(d) (0, 8)

y	$-3x + 6$
8	$-3(0) + 6$ $= 6$
$8 > 6$	
maka, titik (0, 8) memuaskan $y > -3x + 6$	

Praktis Kendiri 6.1b

1. Lukis garis lurus $y = \frac{2}{3}x - 2$ untuk $0 \leqslant x \leqslant 3$. Plot titik-titik (3, 1), (2, –2), (1.5, –1), (3, –2) dan (1, –1). Tentukan sama ada titik-titik yang diplot memuaskan $y = \frac{2}{3}x - 2$, $y > \frac{2}{3}x - 2$ atau $y < \frac{2}{3}x - 2$.

2. Lukis garis lurus $y = -\frac{1}{2}x + 2$ untuk $-4 \leqslant x \leqslant 6$. Plot titik-titik (–3, 5), (–3, 1), (1, –2), (2, 1) dan (4, 5). Tentukan sama ada titik-titik yang diplot memuaskan $y = -\frac{1}{2}x + 2$, $y > -\frac{1}{2}x + 2$ atau $y < -\frac{1}{2}x + 2$.

3. Diberi persamaan linear $y = 4x - 5$. Tanpa melukis graf garis lurus, tentukan sama ada titik-titik yang diberikan memuaskan $y = 4x - 5$, $y > 4x - 5$ atau $y < 4x - 5$.

(a) (2, 4) (b) (3, 7) (c) (0, –6) (d) (–2, 0) (e) (4, 5)

4. Diberi persamaan linear $y = -3x + 4$. Tanpa melukis graf garis lurus, tentukan sama ada titik-titik yang diberikan memuaskan $y = -3x + 4$, $y > -3x + 4$ atau $y < -3x + 4$.

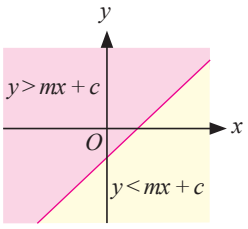
(a) (–2, 3) (b) (1, 1) (c) (–1, 8) (d) (0, 1) (e) (–0.5, 7)

Bagaimanakah anda menentukan dan melorek rantau yang memuaskan satu ketaksamaan linear?

Standard Pembelajaran

Menentukan dan melorek rantau yang memuaskan satu ketaksamaan linear.

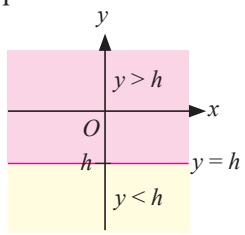
Anda telah mengetahui bahawa jika satu garis lurus yang mewakili persamaan linear $y = mx + c$ dilukis pada satah Cartes, semua titik yang ada pada satah Cartes tersebut boleh dikategorikan dalam tiga kumpulan, iaitu:



Rajah 1

- Titik-titik yang terletak pada garis lurus memuaskan persamaan $y = mx + c$.
- Titik-titik yang terletak di rantau atas garis lurus memuaskan ketaksamaan $y > mx + c$.
- Titik-titik yang terletak di rantau bawah garis lurus memuaskan ketaksamaan $y < mx + c$.

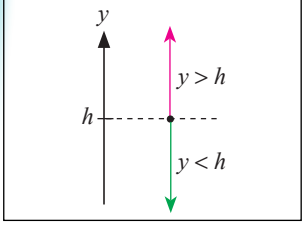
Bagi garis lurus $y = h$ dan $x = k$ yang dilukis pada satah Cartes dengan keadaan h dan k ialah pemalar, semua titik-titik yang ada pada satah Cartes tersebut juga boleh dikategorikan seperti berikut:

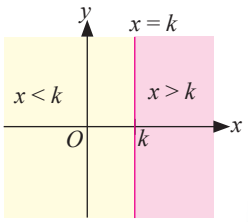


Rajah 2

- Titik-titik yang terletak pada garis lurus memuaskan persamaan $y = h$.
- Titik-titik yang terletak di rantau atas garis lurus memuaskan ketaksamaan $y > h$.
- Titik-titik yang terletak di rantau bawah garis lurus memuaskan ketaksamaan $y < h$.

MEMORI SAYA

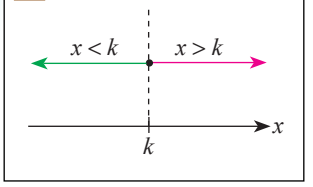




Rajah 3

- Titik-titik yang terletak pada garis lurus memuaskan persamaan $x = k$.
- Titik-titik yang terletak di rantau kanan garis lurus memuaskan ketaksamaan $x > k$.
- Titik-titik yang terletak di rantau kiri garis lurus memuaskan ketaksamaan $x < k$.

MEMORI SAYA



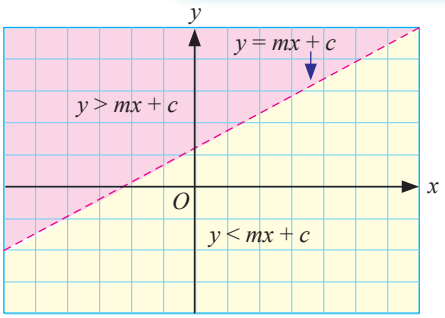
Apakah kaitan antara titik pada satah Cartes dengan ketaksamaan $y > mx + c$, $y < mx + c$, $y \geqslant mx + c$ dan $y \leqslant mx + c$?

$>$, $<$

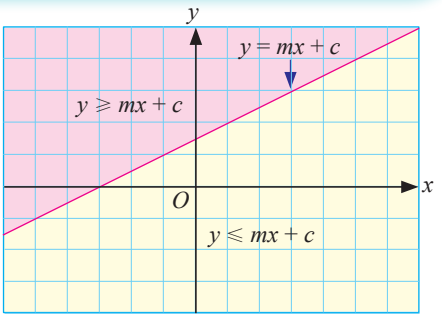
- Titik-titik berada di rantau atas atau rantau bawah suatu garis lurus $y = mx + c$.
- Garis lurus dilukis dengan menggunakan garis sempang.

$\geqslant$, $\leqslant$

- Titik-titik yang ada pada garis lurus $y = mx + c$ termasuk dalam kawasan rantau atas atau rantau bawah.
- Garis lurus dilukis dengan menggunakan garis padu.



Rajah 4



Rajah 5

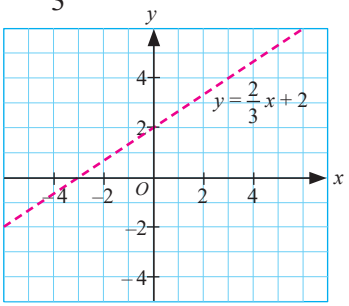
Rantau tidak termasuk titik-titik yang terletak pada garis lurus $y = mx + c$

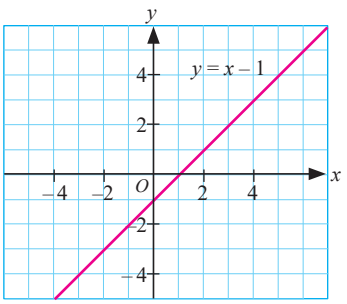
Rantau termasuk titik-titik yang terletak pada garis lurus $y = mx + c$

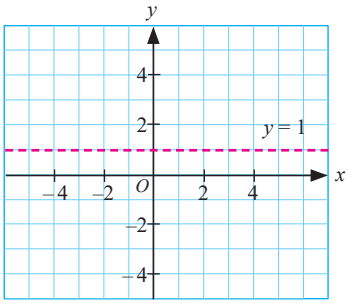
Contoh 5

Lorekkan rantau yang mewakili ketaksamaan yang diberikan.

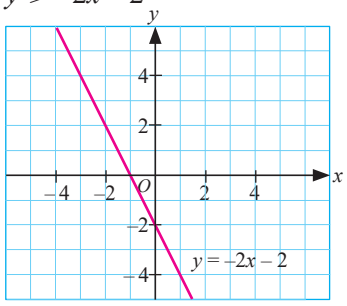
(a) $y > \frac{2}{3}x + 2$ (b) $y \leqslant x - 1$ (c) $y < 1$



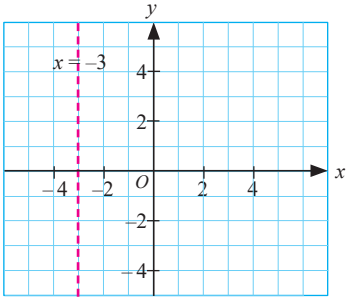




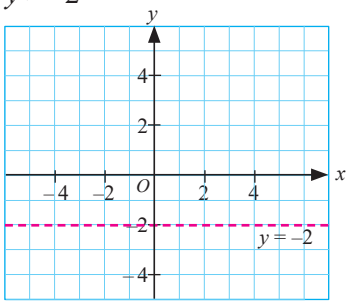
(d) $y \geqslant -2x - 2$



(e) $x > -3$

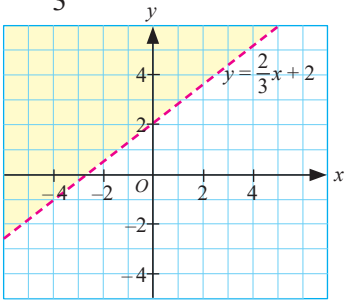


(f) $y > -2$

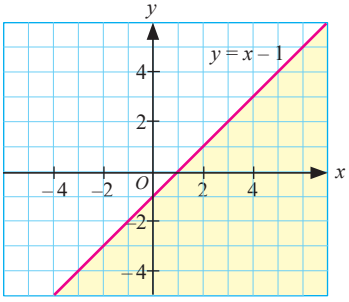


Penyelesaian:

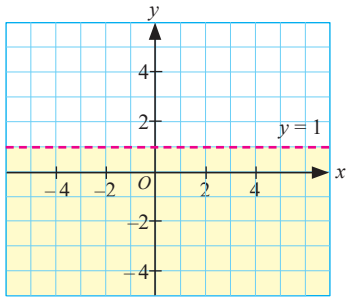
(a) $y > \frac{2}{3}x + 2$



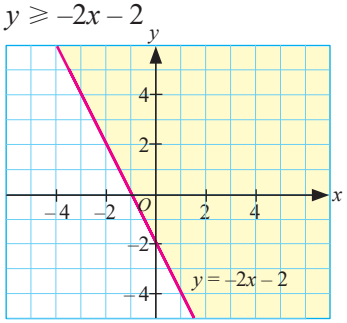
(b) $y \leqslant x - 1$



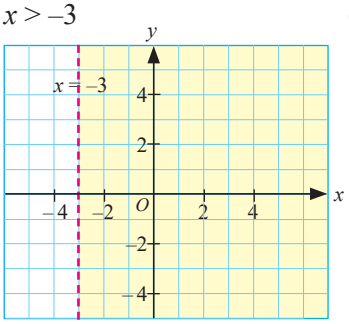
(c) $y < 1$



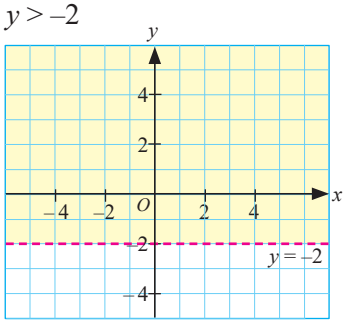
(d) $y \geqslant -2x - 2$



(e) $x > -3$



(f) $y > -2$



Contoh 6

Lukis graf dan lorek rantau yang mewakili ketaksamaan berikut.

(a) $y \leqslant 2x + 3$ (b) $y > x + 5$ (c) $y \leqslant 2x$

(d) $x - y > 4$ (e) $y \geqslant 0$ (f) $x < 4$

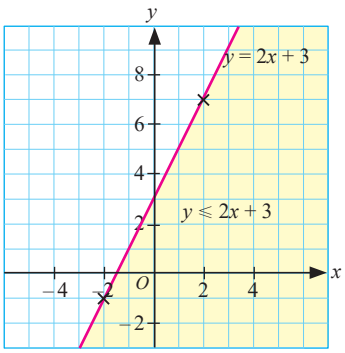
TIP

Tukarkan ketaksamaan linear yang diberi kepada bentuk persamaan linear untuk melukis graf garis lurus.

Penyelesaian:

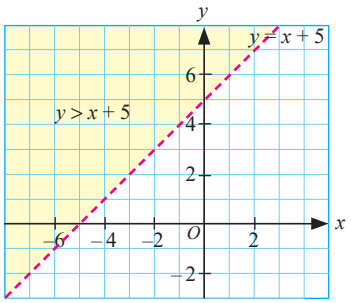
(a) $y = 2x + 3$

x	–2	2
y	–1	7



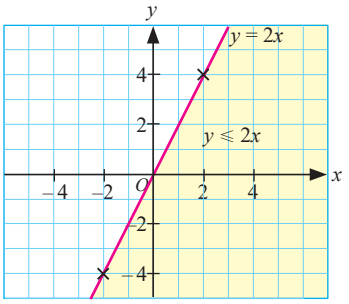
(b) $y = x + 5$

x	0	–5
y	5	0



(c) $y = 2x$

x	-2	2
y	-4	4



(d) $x - y = 4$

Tukarkan pekali y kepada nilai positif untuk memudahkan pemilihan rantau.

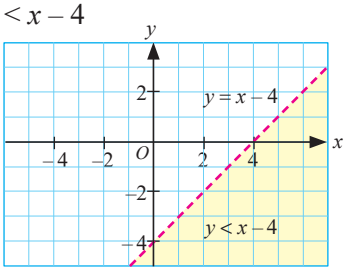
$x - y > 4$

$(\times -1)$: $-x + y < -4$

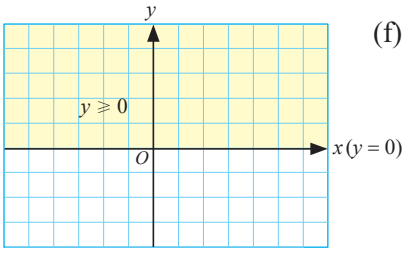
$y < x - 4$

$y = x - 4$

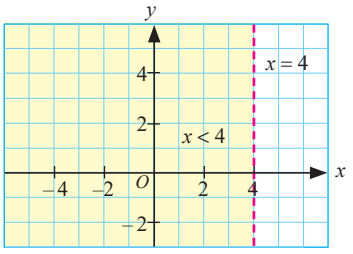
x	0	4
y	-4	0



(e) $y = 0$ (paksi-x)



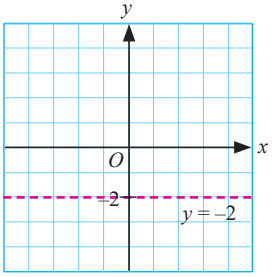
(f) $x = 4$



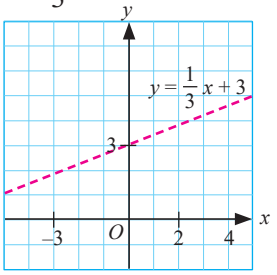
Praktis Kendiri 6.1c

1. Lorek rantau yang mewakili ketaksamaan yang diberikan.

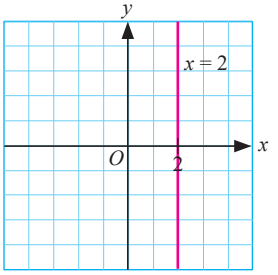
(a) $y < -2$



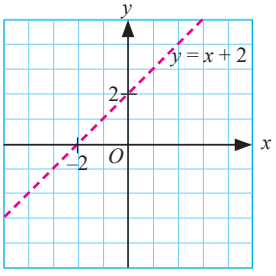
(b) $y < \frac{1}{3}x + 3$



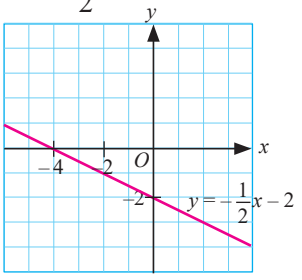
(c) $x \leqslant 2$



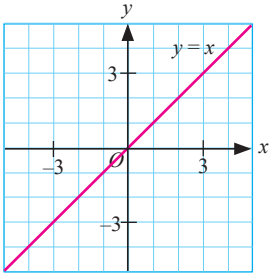
(d) $y > x + 2$



(e) $y \geqslant -\frac{1}{2}x - 2$



(f) $y \geqslant x$



2. Lukis graf dan lorek rantau yang mewakili ketaksamaan berikut.

(a) $x \leqslant 0$ (b) $y > \frac{1}{2}x$ (c) $x + y \geqslant -3$ (d) $2y < x + 4$

(e) $y \leqslant -x + 2$ (f) $2y + x \geqslant 2$ (g) $x - y \geqslant 2$ (h) $x - y < -3$

6.2 Sistem Ketaksamaan Linear dalam Dua Pemboleh Ubah

Apakah maksud sistem ketaksamaan linear?

Standard Pembelajaran

Mewakilkan situasi dalam bentuk sistem ketaksamaan linear.

Sebuah agensi pelancongan perlu membawa 150 orang pelancong dan bagasi dengan jumlah jisim 2 000 kg. Agensi tersebut akan menyediakan bas dan van untuk membawa pelancong-pelancong tersebut. Sebuah bas boleh memuatkan 32 orang penumpang dan bagasi 350 kg dan sebuah van boleh memuatkan lapan orang penumpang dan bagasi 100 kg. Bilangan maksimum bas yang disediakan ialah empat buah. Berapakah bilangan bas dan van maksimum perlu digunakan dengan kos yang minimum?

Masalah seperti di atas boleh diselesaikan dengan membina beberapa ketaksamaan linear yang berkaitan dan menentukan rantau yang memuaskan kesemua ketaksamaan linear yang dibina. Gabungan dua atau lebih ketaksamaan linear dikenali sebagai **sistem ketaksamaan linear**.

Bagaimanakah anda menentukan ketaksamaan yang sesuai untuk suatu situasi tertentu?

Contoh situasi	Ketaksamaan linear
y lebih besar daripada x	$y > x$
y kurang daripada x	$y < x$
y tidak kurang daripada x	$y \geqslant x$
y tidak lebih daripada x	$y \leqslant x$
y sekurang-kurangnya k kali x	$y \geqslant kx$
y selebih-lebihnya k kali x	$y \leqslant kx$
Maksimum y ialah k	$y \leqslant k$
Minimum y ialah k	$y \geqslant k$
Hasil tambah x dan y lebih besar daripada k	$x + y > k$
Beza y dan x kurang daripada k	$y - x < k$
y melebihi x sekurang-kurangnya k	$y - x \geqslant k$

Contoh 7

SMK Seri Permata akan menganjurkan Kem Kepimpinan semasa cuti pertengahan tahun. Sebanyak y orang murid Tingkatan 4 dan x orang murid Tingkatan 5 akan mengambil bahagian dalam kem tersebut. Pemilihan peserta kem mengikut syarat-syarat yang berikut:

(a) Jumlah peserta kem selebih-lebihnya 40 orang.

(b) Bilangan murid tingkatan 5 tidak kurang daripada bilangan murid Tingkatan 4.

(c) Sekurang-kurangnya 15 orang murid Tingkatan 4 akan menyertai kem tersebut.

Tulis semua ketaksamaan linear yang memenuhi syarat-syarat di atas.

Indikator

$x \geqslant 0$ dan $y \geqslant 0$ kerana x dan y mewakili bilangan.

Penyelesaian:

(a) $x + y \leqslant 40$ (b) $x \geqslant y$ (c) $y \geqslant 15$

Contoh 8

Sebuah kedai peralatan komputer menjual dakwat pengganti jenama x dan jenama y untuk pencetak. Pengusaha kedai perlu membuat tempahan dakwat yang berharga RM14 dan RM18 masing-masing daripada pemborong. Syarat-syarat tempahan adalah seperti berikut:

(a) Jumlah dakwat yang ditempah tidak melebihi 25 unit.

(b) Bilangan dakwat jenama y sekurang-kurangnya dua kali jenama x.

(c) Bilangan dakwat jenama y tidak melebihi 8 unit.

(d) Jumlah pembelian tidak melebihi RM400.

Tulis semua ketaksamaan linear yang memenuhi syarat-syarat di atas.

Penyelesaian:

(a) $x + y \leqslant 25$ (b) $y \geqslant 2x$ (c) $y \leqslant 8$ (d) $14x + 18y \leqslant 400$

Praktis Kendiri 6.2a

1. Encik Wong membeli dua jenis kemeja daripada pemborong untuk dijual di kedainya. Kemeja jenama x berharga RM8 sehelai dan kemeja jenama y berharga RM12 sehelai. Syarat-syarat pembelian kemeja adalah seperti yang berikut:

(a) Jumlah kemeja yang dibeli tidak melebihi 50 helai.

(b) Kemeja jenama x sekurang-kurangnya dua kali kemeja jenama y.

(c) Jumlah pembelian tidak melebihi RM850.

Tulis semua ketaksamaan linear yang memenuhi syarat-syarat di atas.

2. Sebuah kilang menghasilkan dua jenis kasut sukan. Kasut sukan jenis x adalah untuk kanak-kanak dan kasut sukan jenis y adalah untuk orang dewasa. Syarat-syarat pengeluaran kedua-dua jenis kasut sukan dalam tempoh seminggu seperti yang berikut:

(a) Pengeluaran maksimum kasut ialah 500 pasang.

(b) Kasut sukan kanak-kanak selebih-lebihnya tiga kali kasut sukan orang dewasa.

(c) Pengeluaran minimum kasut sukan dewasa ialah 200 pasang.

Tulis semua ketaksamaan linear yang memenuhi syarat-syarat di atas.

3. Encik Musa mempunyai sebidang tanah untuk menanam sayur-sayuran. Beliau ingin menanam dua jenis cili, iaitu cili hijau dan cili padi. Syarat-syarat penanaman dua jenis cili adalah seperti yang berikut:

(a) Jumlah pokok cili yang boleh ditanam ialah 250 pokok.

(b) Bilangan pokok cili hijau sekurang-kurangnya tiga kali bilangan pokok cili padi.

(c) Minimum pokok cili hijau ialah 100 pokok.

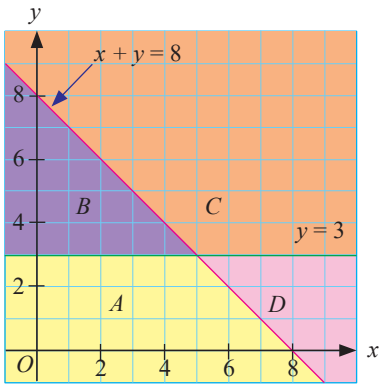
Tulis semua ketaksamaan linear yang memenuhi syarat-syarat di atas.

Bagaimanakah anda menentukan konjektur tentang titik dalam rantau yang memuaskan suatu sistem ketaksamaan linear?

Standard Pembelajaran

Membuat dan menentusahkan konjektur tentang titik dalam rantau dan penyelesaian bagi suatu sistem ketaksamaan linear.

Titik yang memuaskan kesemua ketaksamaan linear dalam sistem ketaksamaan linear boleh ditentukan dengan mengenal pasti rantau yang sesuai.



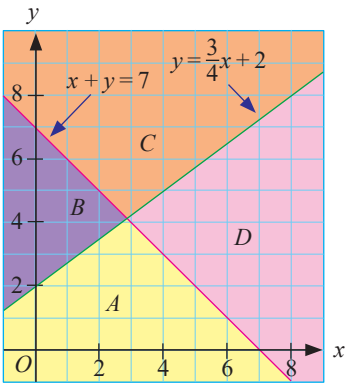
Rajah di atas menunjukkan rantau yang mewakili suatu sistem ketaksamaan linear. Hanya satu rantau daripada rantau A, B, C dan D akan memuaskan kedua-dua ketaksamaan linear $x + y \leqslant 8$ dan $y \geqslant 3$. Anda boleh menentukan rantau tersebut dengan menggantikan sekurang-kurangnya satu titik daripada rantau ke dalam ketaksamaan linear yang diberikan.

Rantau	Titik	Ketaksamaan $x + y \leqslant 8$	Benar/Palsu	Ketaksamaan $y \geqslant 3$	Benar/Palsu
A	(2, 1)	$2 + 1 \leqslant 8$	Benar	$1 \geqslant 3$	Palsu
	(4, 2)	$4 + 2 \leqslant 8$	Benar	$2 \geqslant 3$	Palsu
B	(2, 5)	$2 + 5 \leqslant 8$	Benar	$5 \geqslant 3$	Benar
	(3, 4)	$3 + 4 \leqslant 8$	Benar	$4 \geqslant 3$	Benar
C	(2, 7)	$2 + 7 \leqslant 8$	Palsu	$7 \geqslant 3$	Benar
	(7, 4)	$7 + 4 \leqslant 8$	Palsu	$4 \geqslant 3$	Benar
D	(7, 2)	$7 + 2 \leqslant 8$	Palsu	$2 \geqslant 3$	Palsu
	(8, 1)	$8 + 1 \leqslant 8$	Palsu	$1 \geqslant 3$	Palsu

Daripada jadual didapati bahawa, hanya titik-titik daripada rantau B memuaskan kedua-dua ketaksamaan yang diuji. Maka rantau B ialah rantau yang memuaskan ketaksamaan $x + y \leqslant 8$ dan $y \geqslant 3$.

Contoh 9

Berdasarkan rajah di sebelah, tentukan rantau yang memuaskan ketaksamaan $y \leqslant \frac{3}{4}x + 2$ dan $x + y \geqslant 7$.



Penyelesaian:

Rantau	Titik	$y \leqslant \frac{3}{4}x + 2$	Benar/ Palsu	$x + y \geqslant 7$	Benar/ Palsu
A	$(4, 2)$	$2 \leqslant \frac{3}{4}(4) + 2$	Benar	$4 + 2 \geqslant 7$	Palsu
B	$(1, 5)$	$5 \leqslant \frac{3}{4}(1) + 2$	Palsu	$1 + 5 \geqslant 7$	Palsu
C	$(4, 7)$	$7 \leqslant \frac{3}{4}(4) + 2$	Palsu	$4 + 7 \geqslant 7$	Benar
D	$(8, 6)$	$6 \leqslant \frac{3}{4}(8) + 2$	Benar	$8 + 6 \geqslant 7$	Benar

Rantau D memuaskan kedua-dua ketaksamaan $y \leqslant \frac{3}{4}x + 2$ dan $x + y \geqslant 7$.

Praktis Kendiri 6.2b

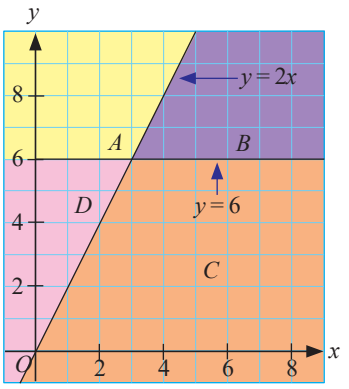
1. Berdasarkan rajah di sebelah, tentukan rantau yang memuaskan sistem ketaksamaan berikut.

(a) $y \geqslant 2x$ dan $y \leqslant 6$.

(b) $y \geqslant 2x$ dan $y \geqslant 6$.

(c) $y \leqslant 2x$ dan $y \leqslant 6$.

(d) $y \leqslant 2x$ dan $y \geqslant 6$.



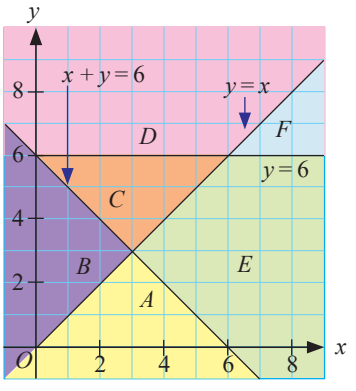
2. Berdasarkan rajah di sebelah, tentukan rantau yang memuaskan sistem ketaksamaan berikut.

(a) $y \leqslant 6, y \leqslant x$ dan $x + y \geqslant 6$.

(b) $y \leqslant 6, y \geqslant x$ dan $x + y \geqslant 6$.

(c) $y \leqslant 6, y \leqslant x$ dan $x + y \leqslant 6$.

(d) $y \geqslant 6, y \geqslant x$ dan $x + y \geqslant 6$.



Bagaimanakah anda menentukan dan melorek rantau yang memuaskan satu sistem ketaksamaan linear?

Standard Pembelajaran

Menentukan dan melorek rantau yang memuaskan satu sistem ketaksamaan linear.

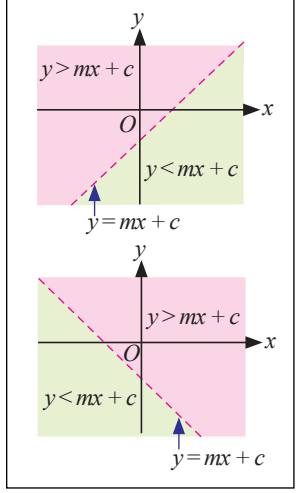
Rantau yang memuaskan satu sistem ketaksamaan linear dapat ditentukan dengan langkah-langkah yang berikut.

(a) Tanda rantau yang terlibat bagi setiap ketaksamaan linear dengan penandaan yang berlainan dan mudah dilihat.

(b) Kenal pasti **rantau sepunya** yang ditanda dengan kesemua penandaan yang terlibat.

(c) Lorek rantau sepunya sepenuhnya. Pastikan tanda lorekan tidak terkeluar daripada rantau sepunya.

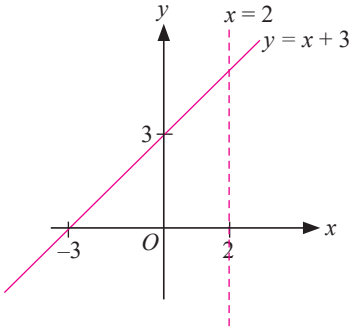
MEMORI SAYA

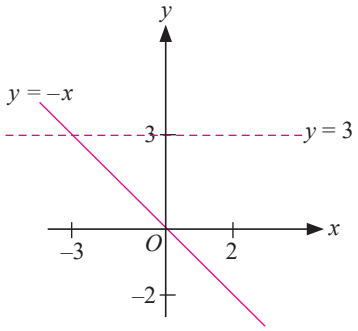


Contoh 10

Lorek rantau yang memuaskan sistem ketaksamaan linear yang diberikan.

(a) $y \leqslant x + 3$ dan $x < 2$ (b) $y \geqslant -x$, $y < 3$ dan $y \geqslant 0$



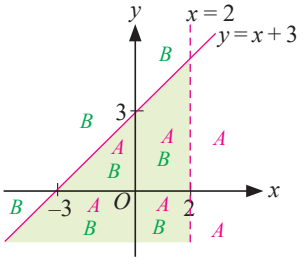


Penyelesaian:

(a) (i) Tandakan rantau yang memuaskan $y \leqslant x + 3$ dengan huruf A.

(ii) Tandakan rantau yang memuaskan $x < 2$ dengan huruf B.

(iii) Lorek rantau sepunya yang ditanda dengan kedua-dua huruf A dan B.



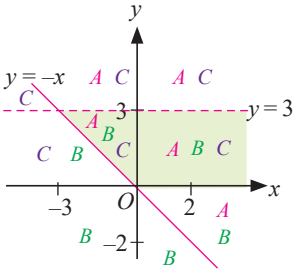
(b) (i) A mewakili rantau $y \geqslant -x$.

B mewakili rantau $y < 3$.

C mewakili rantau $y \geqslant 0$

$y \geqslant 0$ mewakili garis lurus $y = 0$ iaitu paksi-x.

(ii) Lorek rantau sepunya yang ditanda dengan ketiga-tiga huruf A, B dan C.



Contoh 11

Lukis dan lorek rantau yang memuaskan sistem ketaksamaan linear $2y \geqslant x$, $x + y < 4$ dan $x \geqslant 0$.

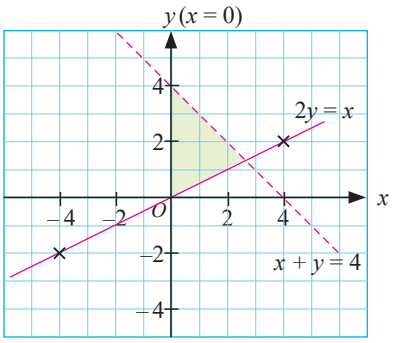
Penyelesaian:

(a) Tukar ketaksamaan linear kepada bentuk persamaan linear dan lukis garis lurus yang mewakili ketaksamaan tersebut.

$2y = x$; $x + y = 4$; $x = 0$ (paksi-y)

x	-4	4
y	-2	2

x	0	4
y	4	0



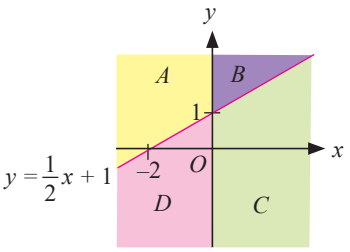
(b) Lukis graf bagi persamaan yang terlibat.

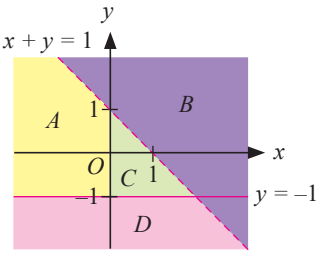
(c) Kenal pasti rantau sepunya dan lorek rantau tersebut.

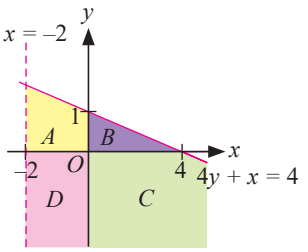
Praktis Kendiri 6.2c

1. Kenal pasti rantau yang memuaskan sistem ketaksamaan linear yang diberikan.

(a) $y \leqslant \frac{1}{2}x + 1$ dan $x \geqslant 0$ (b) $x + y < 1$, $y \geqslant -1$ dan $x \geqslant 0$ (c) $4y + x \leqslant 4$, $x > -2$, $x \leqslant 0$ dan $y \geqslant 0$

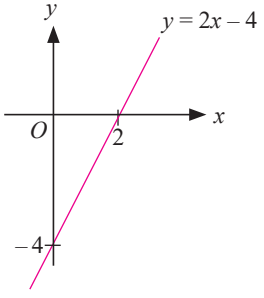


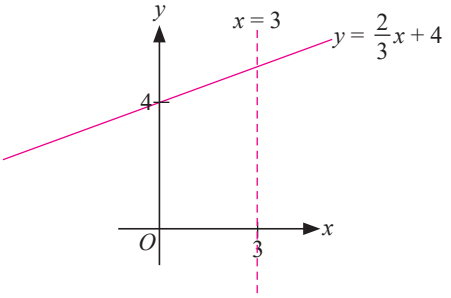




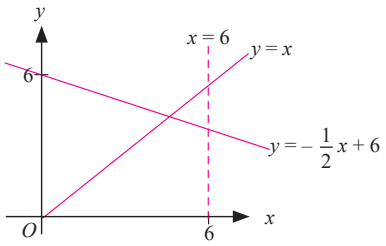
2. Lorek rantau yang memuaskan sistem ketaksamaan linear yang diberikan.

(a) $y \geqslant 2x - 4$, $x \geqslant 0$ dan $y \leqslant 0$ (b) $y \leqslant \frac{2}{3}x + 4$, $x < 3$, $x \geqslant 0$ dan $y \geqslant 0$

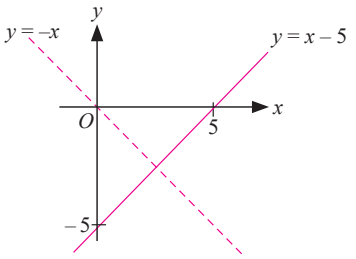




(c) $y \leqslant -\frac{1}{2}x + 6$, $y \leqslant x$, $x < 6$ dan $y \geqslant 0$



(d) $y < -x$, $y \leqslant x - 5$ dan $y > -5$



3. Lakar dan lorek rantau yang memuaskan sistem ketaksamaan linear yang diberikan.

(a) $y < -2x + 6$, $x \geqslant 0$ dan $y \geqslant 0$

(b) $y \geqslant -\frac{1}{2}x + 2$, $y \leqslant x + 2$ dan $x < 4$

(c) $y \leqslant -x + 8$, $y \geqslant -2x + 8$ dan $x < 4$

(d) $y - x \leqslant 6$, $y \geqslant x$, $y \leqslant -x + 6$ dan $y \geqslant 0$

Bagaimanakah anda menyelesaikan masalah yang melibatkan sistem ketaksamaan linear dalam dua pemboleh ubah?

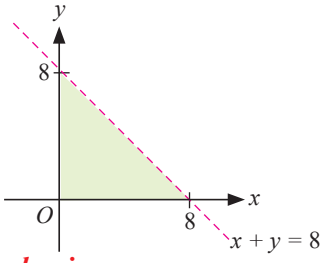
Standard Pembelajaran

Menyelesaikan masalah yang melibatkan sistem ketaksamaan linear dalam dua pemboleh ubah.

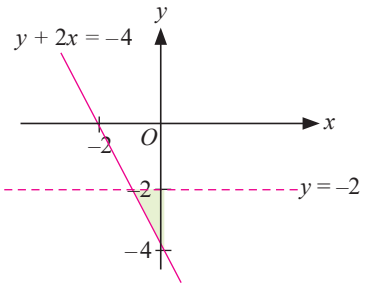
Contoh 12

Nyatakan tiga ketaksamaan linear yang mentakrifkan rantau berlorek dalam setiap rajah berikut.

(a)



(b)



TIP

Persamaan garis lurus untuk
- paksi-x ⇨ $y = 0$
- paksi-y ⇨ $x = 0$

Penyelesaian:

(a) Tiga garis lurus yang terlibat ialah $x + y = 8$, paksi-x dan paksi-y.

(i) Rantau berlorek terletak di bahagian bawah garis lurus $x + y = 8$ dan dilukis dengan garis sempang, maka $x + y < 8$.

(ii) Rantau berlorek terletak di bahagian atas paksi-x, maka $y \geqslant 0$.

(iii) Rantau berlorek terletak di bahagian kanan paksi-y, maka $x \geqslant 0$.

Tiga ketaksamaan linear yang memuaskan rantau berlorek ialah $x + y < 8$, $y \geqslant 0$ dan $x \geqslant 0$.

(b) Tiga garis lurus yang terlibat ialah $y + 2x = -4$, $y = -2$ dan paksi-y.

(i) Rantau berlorek terletak di bahagian atas garis lurus $y + 2x = -4$ dan dilukis dengan garis padu, maka $y + 2x \geqslant -4$.

(ii) Rantau berlorek terletak di bahagian bawah garis lurus $y = -2$ dan dilukis dengan garis sempang, maka $y < -2$.

(iii) Rantau berlorek terletak di bahagian kiri paksi-y, maka $x \leqslant 0$.

Tiga ketaksamaan linear yang memuaskan rantau berlorek ialah $y + 2x \geqslant -4$, $y < -2$ dan $x \leqslant 0$.

Contoh 13

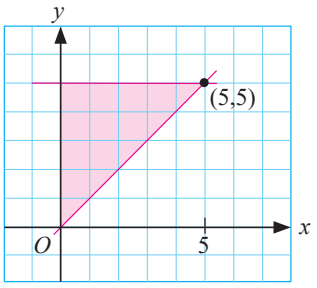
Tulis tiga ketaksamaan linear yang memuaskan rantau berlorek yang diberikan.

MEMORI SAYA

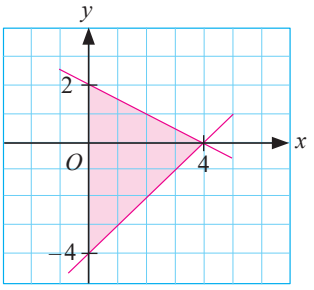
Kecerunan

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

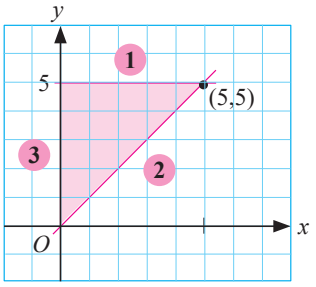
(a)

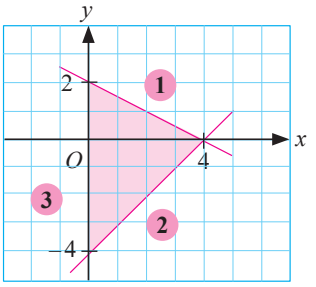


(b)



Penyelesaian:





(a) (i) Persamaan 1

Garis lurus selari dengan paksi-x.

Maka, $y = 5$

(ii) Persamaan 2

Kecerunan, $m = \frac{5-0}{5-0} = 1$

Pintasan-y, $c = 0$.

Maka, $y = x$

(iii) Persamaan 3

Garis lurus ialah paksi-y.

Maka, $x = 0$

Tiga ketaksamaan linear yang memuaskan rantau berlorek ialah $y \leqslant 5$, $y \geqslant x$ dan $x \geqslant 0$

(b) (i) Persamaan 1

Kecerunan, $m = \frac{2-0}{0-4} = -\frac{1}{2}$

Pintasan-y, $c = 2$.

Maka, $y = -\frac{1}{2}x + 2$

(ii) Persamaan 2

Kecerunan, $m = \frac{-4-0}{0-4} = 1$

Pintasan-y, $c = -4$.

Maka, $y = x - 4$

(iii) Persamaan 3

Garis lurus ialah paksi-y.

Maka, $x = 0$

Tiga ketaksamaan linear yang memuaskan rantau berlorek ialah $y \leqslant -\frac{1}{2}x + 2$, $y \geqslant x - 4$ dan $x \geqslant 0$

Contoh 14

Puan Carol perlu memilih selebih-lebihnya 20 orang murid untuk suatu pertandingan koir. Bilangan peserta perempuan sekurang-kurangnya dua kali peserta lelaki.

(a) Tulis dua ketaksamaan linear selain $x \geqslant 0$ dan $y \geqslant 0$ yang mewakili syarat pemilihan peserta pertandingan koir.

(b) Lukis dan lorek rantau yang memuaskan sistem ketaksamaan linear di atas.

(c) Daripada graf,

(i) tentukan bilangan minimum dan maksimum peserta perempuan apabila bilangan peserta lelaki ialah lima orang.

(ii) tentukan sama ada syarat pemilihan dipatuhi jika lapan orang murid lelaki ingin menyertai pertandingan koir tersebut. Berikan justifikasi anda.

Penyelesaian:

(a) Katakan x = peserta perempuan dan y = peserta lelaki

$x + y \leqslant 20$

$x \geqslant 2y$ atau $2y \leqslant x$

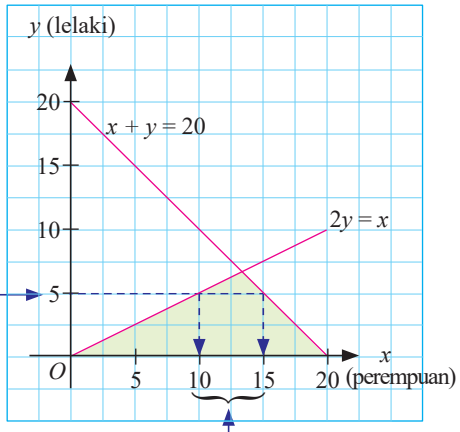
y perlu dijadikan perkara rumus agar rantau ketaksamaan ditanda dengan betul.

(b) $x + y = 20$;

x	0	20
y	20	0

$2y = x$

x	0	20
y	0	10



5 orang peserta lelaki

Julat peserta perempuan yang sepadan dengan 5 orang peserta lelaki

(c) (i) Peserta lelaki, $y = 5$ orang
Peserta perempuan, x : minimum = 10 orang
maksimum = 15 orang

(ii) Tidak, kerana nilai $y = 8$ berada di luar rantau berlorek.

Indikator

Graf ketaksamaan dilukis pada sukuan pertama sahaja kerana situasi melibatkan pemboleh ubah x dan y yang mewakili bilangan.

ZON INFORMASI

Sistem ketaksamaan linear merupakan asas yang digunakan dalam bidang perniagaan untuk mendapatkan keuntungan maksimum dengan menggunakan kos minimum yang melibatkan sumber-sumber terhad seperti tenaga manusia, bahan mentah dan kewangan.

Celik Minda

Bina ketaksamaan linear yang sesuai bagi syarat berikut.

- y selebih-lebihnya tiga kali x.
- Hasil tambah x dan y kurang daripada 100.
- x melebihi y sekurang-kurangnya 20.
- Beza y dan x kurang daripada 50.

Contoh 15

Jumlah maksimum penumpang kereta api di sebuah Taman Tema ialah 30 orang. Sebagai langkah keselamatan, bilangan penumpang dewasa diwajibkan sentiasa melebihi atau sama dengan bilangan penumpang kanak-kanak.

(a) Tulis dua ketaksamaan linear selain $x \geqslant 0$ dan $y \geqslant 0$ yang mewakili situasi yang diberikan.

(b) Lukis dan lorek rantau yang memuaskan sistem ketaksamaan linear di atas.

(c) Daripada graf, tentukan bilangan maksimum kanak-kanak yang dibenarkan menaiki kereta api.

(d) Jika terdapat sebanyak 18 orang penumpang kanak-kanak, adakah kesemua penumpang kanak-kanak tersebut boleh menaiki kereta api secara serentak? Berikan justifikasi anda.

Penyelesaian:

Memahami masalah

(a) Menentukan dua ketaksamaan linear mengikut syarat dalam situasi.

(b) Melukis dan lorek rantau ketaksamaan linear.

(c) Menentukan nilai berkaitan daripada graf.

Merancang strategi

(a) Katakan x = penumpang kanak-kanak dan y = penumpang dewasa

(b) Graf ketaksamaan linear dilukis pada sukuan pertama.

(c) Nilai ditentukan daripada rantau sepunya.

Melaksanakan strategi

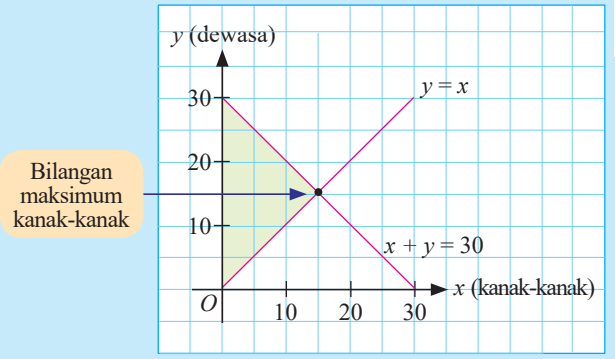
(a) $x + y \leqslant 30$

$y \geqslant x$

(b) $x + y = 30$; $y = x$

x	0	30
y	30	0

x	0	30
y	0	30



(c) Bilangan maksimum penumpang kanak-kanak ialah 15 orang.

(d) Tidak kerana bilangan maksimum penumpang kanak-kanak ialah 15 orang sahaja.

atau

Tidak kerana nilai $x = 18$, berada di luar rantau berlorek.

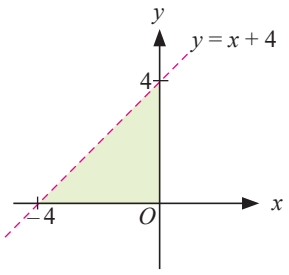
Kesimpulan

Semua titik dalam rantau sepunya akan memuaskan sistem ketaksamaan linear yang dibina berdasarkan syarat-syarat yang diberikan dalam suatu situasi.

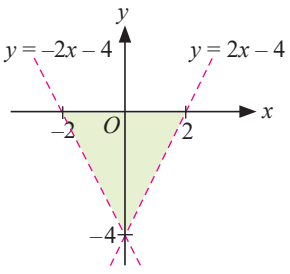
Praktis Kendiri 6.2d

1. Nyatakan tiga ketaksamaan linear yang mentakrifkan rantau berlorek dalam setiap rajah berikut.

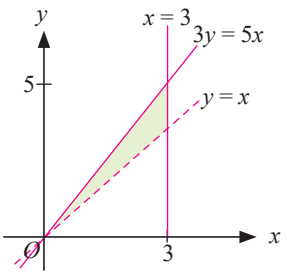
(a)



(b)

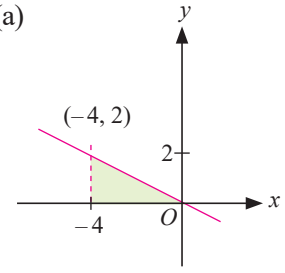


(c)

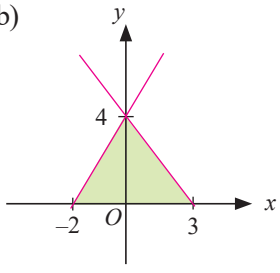


2. Tulis ketaksamaan yang memuaskan rantau berlorek yang diberikan.

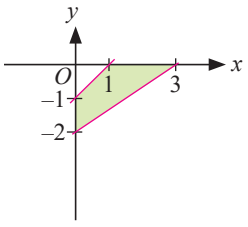
(a)



(b)



(c)



3. Encik Timothy ingin membeli x biji donat dan y biji karipap untuk didermakan kepada pihak sekolah bersempena dengan sambutan Hari Kantin. Jumlah kedua-dua jenis kuih tersebut selebih-lebihnya 150 biji dan bilangan donat adalah sekurang-kurangnya dua kali ganda bilangan karipap.

(a) Tulis dua ketaksamaan linear selain $x \geqslant 0$ dan $y \geqslant 0$ yang mewakili syarat-syarat pembelian kuih oleh Encik Timothy.

(b) Lukis dan lorek rantau yang memuaskan sistem ketaksamaan linear di atas.

(c) Daripada graf, tentukan

(i) bilangan maksimum karipap yang dibeli.

(ii) bilangan minimum dan maksimum donat yang boleh dibeli jika Encik Timothy membeli 25 biji karipap.

4. Puan Kiran Kaur perlu membeli kain langsir untuk rumah baharunya. Beliau membeli x meter kain langsir bercorak bunga dan y meter kain langsir bercorak abstrak. Jumlah panjang kedua-dua jenis langsir ialah tidak melebihi 120 meter. Panjang kain langsir bercorak abstrak ialah sekurang-kurangnya satu pertiga daripada panjang kain langsir bercorak bunga.

(a) Tulis dua ketaksamaan linear selain $x \geqslant 0$ dan $y \geqslant 0$ yang mewakili syarat-syarat pembelian kain langsir oleh Puan Kiran Kaur.

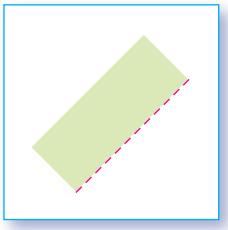
(b) Lukis dan lorek rantau yang memuaskan sistem ketaksamaan linear di atas.

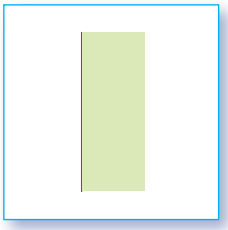
(c) Daripada graf, tentukan panjang maksimum, dalam meter, kain bercorak bunga yang dibeli.

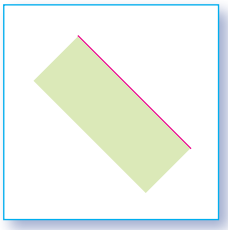
(d) Puan Kiran Kaur membeli 60 meter kain bercorak abstrak dan 80 meter kain bercorak bunga. Adakah pembelian di atas memuaskan sistem ketaksamaan linear yang anda bina? Berikan justifikasi anda.

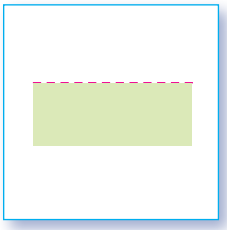
Praktis Komprehensif

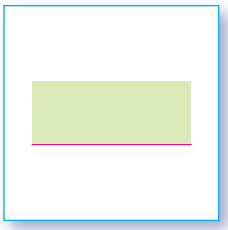
1. Tulis ketaksamaan linear yang sepadan dengan lakaran rantau yang diberikan.

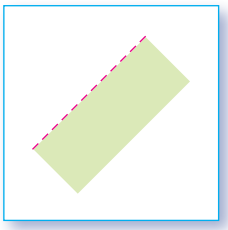
(a) 

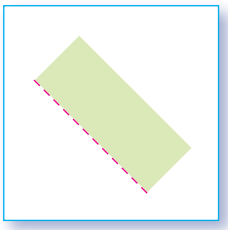
(b) 

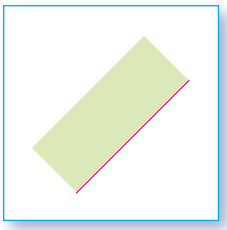
(c) 

(d) 

(e) 

(f) 

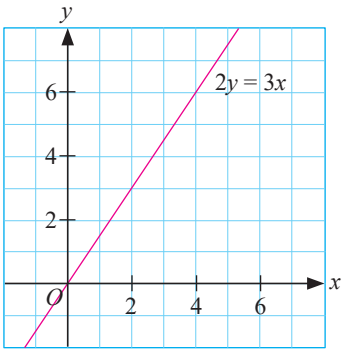
(g) 

(h) 

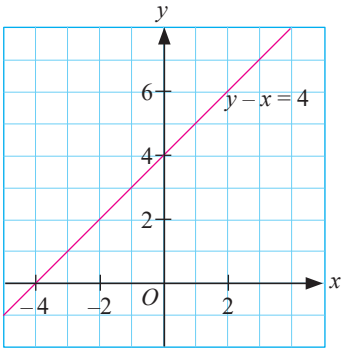
$y > -x - 3$	$y < 4$	$y \leqslant 4 - x$	$x \geqslant 0$	$y \geqslant 0$
$\frac{1}{2}y - x \geqslant 4$	$y < 2x - 5$	$3y + x > 4$	$x \leqslant 2 - y$	$y < -1$
$2y > x + 5$	$-y > 8 - 2x$	$y + x \leqslant 2$	$2y < x$	$2y \geqslant x$
$y \leqslant -\frac{1}{2}x$	$x \geqslant -5$	$-y \leqslant 4 - x$	$y \geqslant 10$	$y - x > 8$

2. Lorek rantau sepunya bagi sistem ketaksamaan linear yang diberikan.

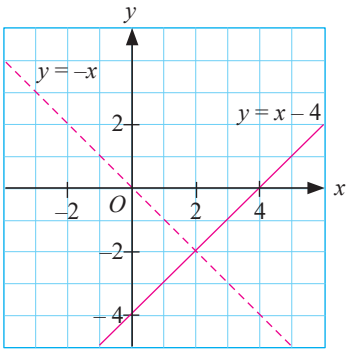
(a) $2y \leqslant 3x$, $x < 4$ dan $y \geqslant 0$



(b) $y - x \geqslant 4$, $y < 4$ dan $x > -4$

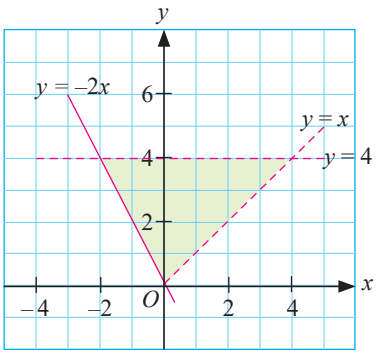


(c) $y > -x$, $y \geqslant x - 4$, $y \leqslant 2$ dan $y \geqslant 0$

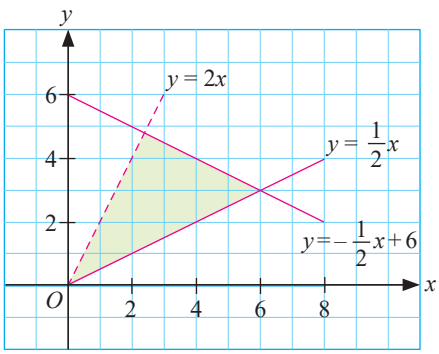


3. Tulis tiga ketaksamaan linear yang memuaskan rantau berlorek yang diberikan.

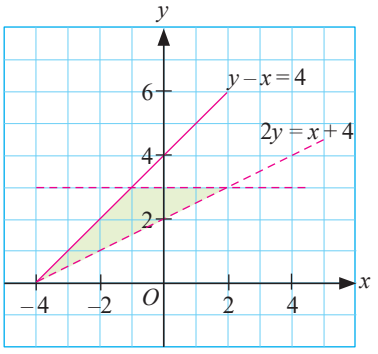
(a)



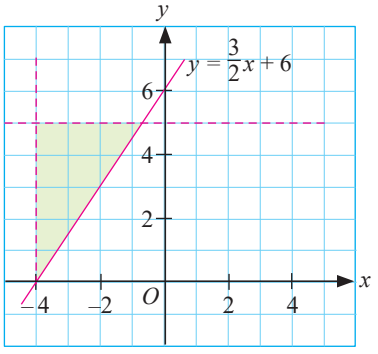
(b)



(c)



(d)



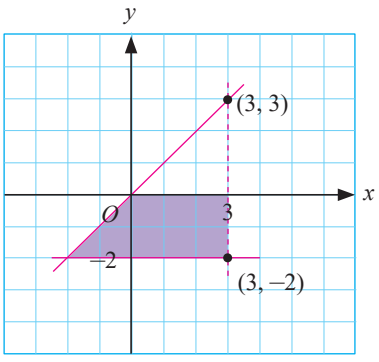
4. Lukis dan lorek rantau sepunya bagi sistem ketaksamaan linear yang diberikan.

(a) $y + x \geqslant 10$, $y \geqslant x$ dan $y < 10$

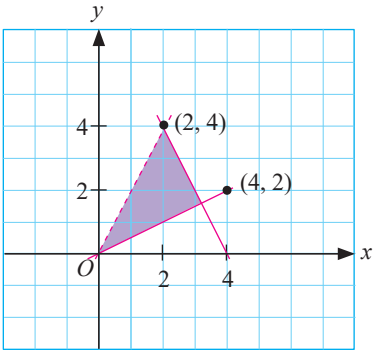
(b) $y \leqslant x + 6$, $y \geqslant \frac{2}{3}x + 4$, $y > -x$ dan $x \leqslant 0$

5. Tulis ketaksamaan linear yang memuaskan imej rantau berlorek melalui pantulan pada paksi-x.

(a)

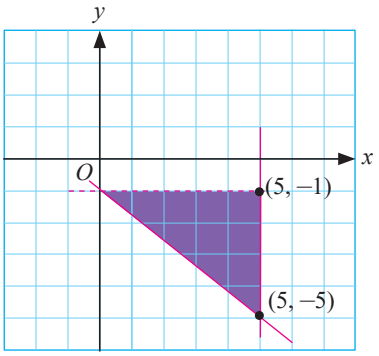


(b)

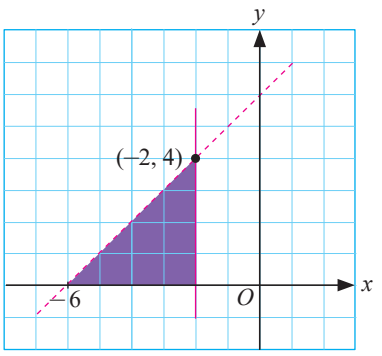


6. Tulis ketaksamaan linear yang memuaskan imej rantau berlorek melalui pantulan pada paksi-y.

(a)



(b)



7. Puan Jasmin merupakan seorang tukang jahit. Beliau menjahit dua jenis baju kurung, baju kurung pesak dan baju kurung moden. Katakan Puan Jasmin menjahit x helai baju kurung pesak dan y helai baju kurung moden pada suatu bulan tertentu. Maklumat di bawah berkaitan dengan jahitan kedua-dua jenis baju kurung oleh Puan Jasmin pada bulan tersebut.

(a) Jumlah baju kurung yang dijahit selebih-lebihnya 40 helai.

(b) Bilangan maksimum baju kurung pesak ialah 25 helai.

(c) Bilangan minimum baju kurung moden ialah 10 helai.

Berdasarkan maklumat di atas,

(i) tulis tiga ketaksamaan linear selain $x \geqslant 0$ dan $y \geqslant 0$ yang mewakili situasi di atas.

(ii) lukis dan lorek rantau sepunya yang memuaskan ketaksamaan linear yang dibina.

(iii) daripada graf, tentukan bilangan minimum dan maksimum baju kurung moden yang mungkin dijahit jika bilangan baju kurung pesak ialah 10 helai.

(iv) harga jahitan sehelai baju kurung pesak ialah RM50 dan baju kurung moden ialah RM75. Berdasarkan rantau sepunya, hitung pendapatan maksimum yang dapat dijanakan oleh Puan Jasmine jika beliau berjaya menjahit 15 helai baju kurung pesak.

8. Encik Aiman menjual kain batik yang dibeli daripada pembekal x dan pembekal y. Jumlah kain batik yang dibeli selebih-lebihnya 1 000 meter. Kain batik yang dibekalkan oleh pembekal y adalah sekurang-kurangnya separuh daripada pembekal x.

(a) Berdasarkan maklumat pembelian di atas, tulis dua ketaksamaan linear yang berkaitan selain $x \geqslant 0$ dan $y \geqslant 0$.

(b) Lukis dan lorek rantau sepunya yang memuaskan ketaksamaan linear yang dibina.

(c) Daripada graf, tentukan panjang minimum dan maksimum dalam meter, kain batik yang dibekalkan oleh pembekal y jika Encik Aiman membeli 500 meter kain batik daripada pembekal x.

(d) Pembekal x menghadapi masalah stok. Encik Aiman terpaksa membeli sekurang-kurangnya $\frac{3}{4}$ bahagian daripada pembekal y.

(i) Tulis ketaksamaan linear yang mewakili situasi di atas.

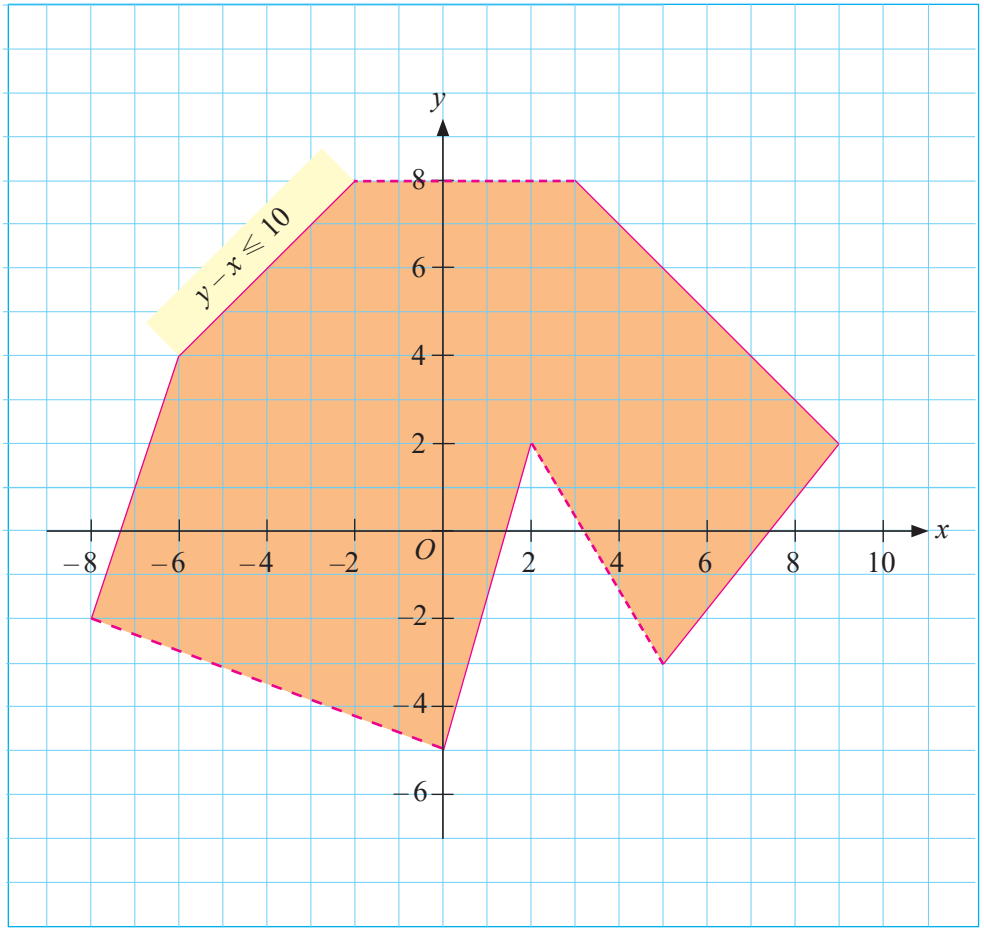
(ii) Lukis garis lurus yang mewakili ketaksamaan pada d(i).

PROJEK

1. Bahagikan kelas kepada beberapa kumpulan yang sesuai.
2. Setiap kumpulan dikehendaki melukis satu oktagon pada satah Cartes dengan menggunakan kertas grid (Contoh 1) dan menulis ketaksamaan linear yang mewakili kawasan berlorek dalam kertas berasingan.
3. Semua bahan yang disediakan dimasukkan ke dalam sampul dan diedarkan kepada kumpulan lain.
4. Setiap kumpulan dikehendaki memadankan ketaksamaan linear yang betul pada sisi poligon (Contoh 1) dalam tempoh masa tertentu.
5. Ketua atau wakil kumpulan asal (penyedia) dikehendaki menyemak padanan ketaksamaan linear dan memberikan markah.

TIP

Tulis ketaksamaan linear dalam bentuk am.

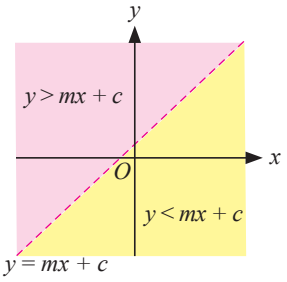


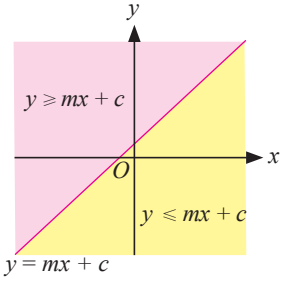
Contoh 1

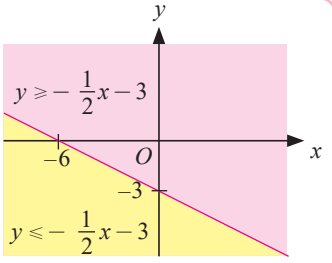
PETA KONSEP

Ketaksamaan Linear dalam Dua Pemboleh Ubah

Garis sempang ⇨ titik-titik pada garis lurus $y = mx + c$ tidak termasuk dalam rantau.
Garis padu ⇨ titik-titik pada garis lurus $y = mx + c$ termasuk dalam rantau.

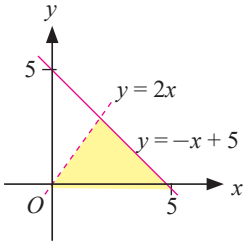




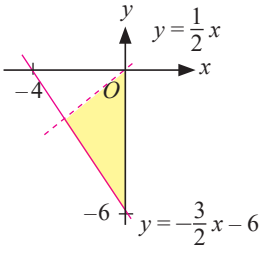


Sistem Ketaksamaan Linear dalam Dua Pemboleh Ubah

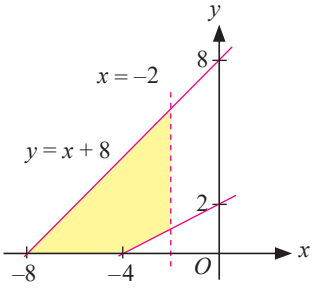
Rantau sepunya ⇨ rantau yang memuaskan semua ketaksamaan linear yang terlibat dalam satu sistem ketaksamaan linear.



1. $y \geqslant 0$
2. $y \leqslant -x + 5$
3. $y < 2x$



1. $x \leqslant 0$
2. $y < \frac{1}{2}x$
3. $y \geqslant -\frac{3}{2}x - 6$



1. $y \geqslant 0$
2. $y \geqslant \frac{1}{2}x + 2$
3. $y \leqslant x + 8$
4. $x < -2$

Refleksi Kendiri

1. Garis _____ digunakan untuk melukis ketaksamaan linear berbentuk $y > mx + c$ dan $y < mx + c$.

2. Garis _____ digunakan untuk melukis ketaksamaan _____ berbentuk $y \geqslant mx + c$ dan $y \leqslant mx + c$.

3. Rantau yang memuaskan satu _____ ketaksamaan linear dikenali sebagai rantau _____.

Gunakan huruf terakhir daripada mana-mana empat jawapan anda untuk meneka nama sebuah bandar di negeri Johor.

_____ _____ _____ _____

Eksplorasi Matematik

1. Muat turun perisian geometri dinamik.

2. Taip ketaksamaan linear. Anda boleh klik pada papan kekunci yang terdapat pada bahagian bawah paparan.

3. Tekan *enter* setiap kali anda ingin menambah ketaksamaan linear lain untuk membentuk rantau sepunya.

4. Anda juga boleh melihat rantau sepunya bagi gabungan ketaksamaan linear dan ketaksamaan bukan linear.

Graf Gerakan

Anda akan mempelajari

- Graf Jarak-Masa
- Graf Laju-Masa

Mohamad Ridzuan Puzi, atlet paralimpik negara melakar sejarah dengan mencipta rekod dunia dalam acara 100 m lelaki T36, dan rekod Sukan Asia bagi acara lompat jauh dengan meraih tiga pingat emas keseluruhan. Catatan terbaik dalam acara reben biru itu, iaitu 11.87 s merupakan satu rekod dunia baharu. Ridzuan juga memecah rekod Sukan Asia dalam acara lompat jauh dengan catatan terbaiknya 5.59 m dan merangkul pingat emas dalam acara 400 m.

Mohamad Ridzuan Puzi muncul sebagai atlet negara pertama yang dinobatkan sebagai Atlet Para (Lelaki) Terbaik Asia 2018 dalam majlis khas yang diadakan di Emeriyah Arab Bersatu (UAE) pada 5 Februari 2019.

Apakah teknik yang digunakan oleh pelari untuk memenangi suatu acara larian?

Maslahat Bab

Pengetahuan dalam gerakan sangat penting dalam bidang automobil, sains sukan, fizik, kejuruteraan, astronomi dan sebagainya.

JARINGAN KATA

• graf jarak-masa	• *distance-time graph*
• graf laju-masa	• *speed-time graph*
• jarak	• *distance*
• laju	• *speed*
• laju seragam	• *uniform speed*
• nyahpecutan	• *deceleration*
• pecutan	• *acceleration*

Imbasan Silam

Nicholas Oresme
(1323-1382)

Nicholas Oresme merupakan seorang ahli matematik dan ilmuwan dari Perancis yang penting pada abad ke-14. Beliau menggunakan sistem koordinat segi empat tepat dan dikatakan orang pertama menghasilkan graf laju-masa.

http://yakin-pelajar.com/Oresme/7.pdf

7.1 Graf Jarak-Masa

Apakah yang anda faham tentang graf jarak-masa?

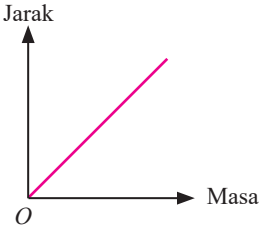
Standard Pembelajaran

Melukis graf jarak-masa.

Adakah anda pernah menaiki pengangkutan awam ke suatu destinasi? Tiket perjalanan, terutamanya tiket kapal terbang akan mengandungi paparan waktu perjalanan bermula dan anggaran waktu anda akan sampai di destinasi yang ditujui. Contohnya, anggaran tempoh masa penerbangan domestik dari Lapangan Terbang Antarabangsa Kuala Lumpur 2 (KLIA 2) ke Miri ialah 2 jam 20 minit. Tahukah anda bagaimanakah anggaran masa ini dikira?

Masihkah anda ingat perkaitan antara laju, jarak dan masa yang dipelajari di Tingkatan 2?

Laju ialah suatu kadar yang melibatkan jarak dan masa. Kaitan antara laju dengan masa boleh diwakilkan dengan melukis graf jarak-masa. Graf jarak-masa membolehkan gerakan suatu objek digambarkan dalam bentuk grafik yang mudah difahami.



Pada suatu graf jarak-masa:

- paksi mencancang mewakili jarak yang dilalui.
- paksi mengufuk mewakili tempoh masa yang diambil.
- kecerunan graf mewakili **kadar perubahan jarak terhadap masa,** iaitu **laju**.

Bagaimanakah anda melukis graf jarak-masa?

Graf jarak-masa boleh dilukis jika maklumat berkaitan dengan suatu gerakan seperti yang berikut diperoleh.

(a) Jadual jarak-masa.

(b) Persamaan yang mewakili hubungan antara jarak dengan masa.

Melukis graf jarak-masa berdasarkan jadual jarak-masa.

Contoh 1

Azreen bercita-cita untuk menjadi seorang pelumba basikal dan berhasrat mengharumkan nama Malaysia di pentas dunia seperti Azizulhasni Awang, jaguh lumba basikal trek negara. Dia bercadang untuk menyertai pertandingan berbasikal peringkat daerah Kerian. Dia bertekad untuk menjalani latihan selama 2 jam setiap hari. Jadual di bawah menunjukkan jarak yang dilalui dan masa yang diambil oleh Azreen semasa latihan.

Masa (minit)	0	30	60	90	120
Jarak (km)	0	10	20	30	40

Lukis graf jarak-masa berdasarkan jadual di atas.

Malaysiaku

Azizulhasni Awang juga digelar sebagai *The Pocket Rocketman*. Mengapa?

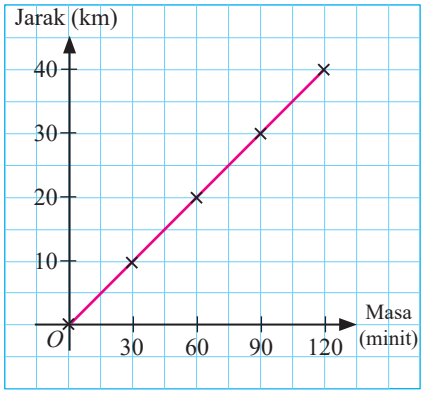
Penyelesaian:

Langkah

(a) Pilih skala yang sesuai bagi mewakili jarak dan masa yang diberikan.

(b) Plot titik yang mewakili pasangan nilai jarak dan masa pada kertas grid atau kertas graf.

(c) Sambungkan titik-titik yang diplot dengan menggunakan pembaris untuk memperoleh graf jarak-masa seperti di sebelah.



Melukis graf jarak-masa berdasarkan persamaan yang mewakili hubungan antara jarak dengan masa.

Contoh 2

Encik Selva memandu keretanya selama 3 jam sejauh 240 km dari Kuala Lumpur ke Kuantan untuk melawat ibunya. Jarak, s km yang dilalui oleh Encik Selva dalam tempoh masa, t jam diwakili oleh persamaan $s = 80t$. Lukis satu graf jarak-masa yang mewakili perjalanan Encik Selva dari Kuala Lumpur ke Kuantan.

Penyelesaian:

Langkah

(a) Bina satu jadual jarak-masa seperti di bawah dengan menggunakan persamaan $s = 80t$.

Masa, t (jam)	0	1	2	3
Jarak, s (km)	0	80	160	240

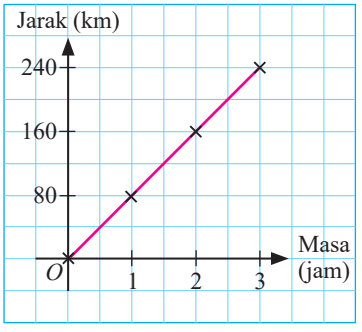
$s = 80t$ apabila $t = 0$, $s = 80(0)$ $s = 0$

$s = 80t$ apabila $t = 3$, $s = 80(3)$ $s = 240$

TIP

Suatu graf garis lurus boleh dilukis dengan memplot sekurang-kurangnya dua titik yang berkaitan.

(b) Lukis graf jarak-masa seperti di sebelah dengan memplot titik berdasarkan jadual yang dibina.



Contoh 3

Jaswinder Singh mengambil bahagian dalam acara merentas desa sejauh 8 km yang dianjurkan oleh pihak sekolah semasa Hari Sukan Negara. Diberi hubungan antara jarak dengan masa larian dari garis penamat ialah $s = 8 - \frac{1}{5}t$, dengan keadaan s ialah jarak dalam km dan t ialah masa dalam minit. Lukis graf jarak-masa yang mewakili larian Jaswinder Singh untuk tempoh $0 \leqslant t \leqslant 40$.

Penyelesaian:

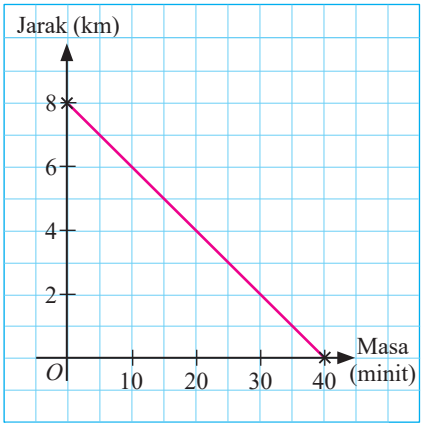
Diberi $s = 8 - \frac{1}{5}t$

masa, *t* (minit)	0	40
jarak, *s* (km)	8	0

2 titik yang memenuhi persamaan adalah mencukupi untuk melukis garis lurus.

$s = 8 - \frac{1}{5}t$
apabila $t = 0$,
$s = 8 - \frac{1}{5}(0)$
$s = 8$

$s = 8 - \frac{1}{5}t$
apabila $t = 40$,
$s = 8 - \frac{1}{5}(40)$
$s = 0$



Praktis Kendiri 7.1a

1. Jadual di bawah menunjukkan masa yang diambil oleh Haji Ali untuk berjalan dari rumahnya ke masjid untuk menunaikan solat. Beliau memerlukan 20 minit untuk berjalan ke masjid yang terletak 300 meter dari rumahnya. Lukis satu graf jarak-masa berdasarkan jadual yang diberikan.

Masa (minit)	0	5	10	15	20
Jarak (meter)	0	75	150	225	300

2. Encik Nyambek memandu kereta ke tempat kerja yang terletak 45 km dari rumahnya di Bekenu. Jadual di bawah menunjukkan tempoh masa yang diambil oleh Encik Nyambek untuk sampai di pejabatnya di Miri dari Bekenu. Lukis satu graf jarak-masa berdasarkan jadual yang diberikan.

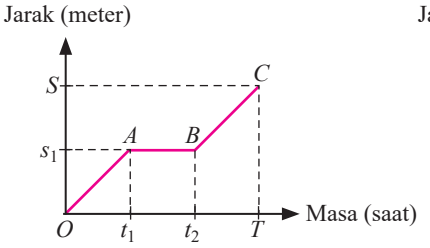
Masa (jam)	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
Jarak (km)	0	9	18	27	36	45

3. Pergerakan suatu zarah bagi tempoh masa tertentu digambarkan oleh persamaan $s = 8t + 5$ dengan keadaan s ialah jarak dalam cm dan t ialah masa dalam saat. Lukis satu graf jarak-masa yang mewakili gerakan zarah tersebut untuk tempoh 5 saat.

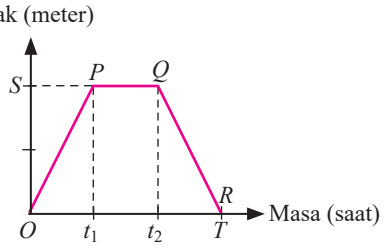
4. Leong berbasikal ke rumah Zainal yang terletak 1.6 km dari rumahnya. Hubungan gerakan Leong dari rumah Zainal diberi oleh persamaan $s = 1.6 - 0.2t$ dengan keadaan s ialah jarak dalam km dan t ialah masa dalam minit. Lukis graf jarak-masa yang mewakili perjalanan Leong untuk tempoh $0 \leqslant t \leqslant 8$.

Bagaimanakah anda mentafsir graf jarak-masa?

Teliti dua bentuk graf jarak-masa di bawah.



Rajah 1



Rajah 2

Rajah 1	Rajah 2
Rajah 1 menunjukkan suatu gerakan dari O ke C sejauh S meter dalam tempoh T saat.	Rajah 2 menunjukkan suatu gerakan dari O ke R melalui P dan Q.
OA ⇨ **kecerunan** graf **positif** ⇨ **kecerunan** OA mewakili **kelajuan** gerakan ⇨ gerakan dengan **laju seragam** ⇨ gerakan sejauh s_1 meter dalam tempoh t_1 saat	OP ⇨ **kecerunan** graf **positif** ⇨ gerakan sejauh S meter dalam tempoh t_1 saat
AB ⇨ **kecerunan sifar** ⇨ tidak ada perubahan jarak bermaksud gerakan terhenti (**pegun**) ⇨ pegun untuk tempoh masa $(t_2 - t_1)$ saat	PQ ⇨ **kecerunan sifar** ⇨ tidak ada perubahan jarak (**pegun**) ⇨ pegun untuk tempoh masa $(t_2 - t_1)$ saat
BC ⇨ kecerunan positif ⇨ gerakan diteruskan sehingga C	QR ⇨ kecerunan **negatif** ⇨ kelajuan negatif menunjukkan objek bergerak balik ke tempat asal atau bergerak pada arah bertentangan
OC ⇨ gerakan sejauh S meter dalam tempoh T saat	OR ⇨ gerakan sejauh $2S$ meter (pergi dan balik) dalam tempoh T saat

Standard Pembelajaran

Mentafsir graf jarak-masa dan menghuraikan gerakan berdasarkan graf tersebut.

MEMORI SAYA

$$\text{Laju} = \frac{\text{Jarak}}{\text{Masa}}$$

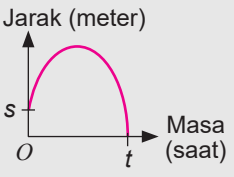
$$\text{Kecerunan} = \frac{\text{Jarak mencancang}}{\text{Jarak mengufuk}}$$

TIP

Kecerunan positif dan kecerunan negatif pada graf jarak-masa menunjukkan arah gerakan.

Celik Minda

Graf jarak-masa di bawah menunjukkan gerakan suatu objek.

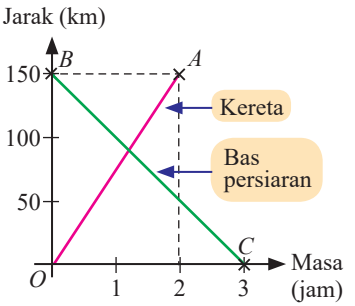


Apakah jenis persamaan yang akan menghasilkan graf jarak-masa seperti di atas?
Bincangkan dan nyatakan contoh gerakan.

BAB 7

Contoh 4

Graf jarak-masa di sebelah menunjukkan gerakan sebuah kereta dan sebuah bas persiaran. Graf OA mewakili gerakan kereta dari Puchong ke Bandaraya Melaka. Graf BC ialah gerakan bas persiaran dari Bandaraya Melaka ke Puchong. Tentukan beza laju, dalam km j^{-1} kedua-dua kenderaan tersebut.



Penyelesaian:

$$\text{Laju kereta} = \frac{\text{beza jarak yang dilalui}}{\text{beza masa yang sepadan}}$$

$$= \frac{(150 - 0)\text{ km}}{(2 - 0)\text{ jam}}$$

$$= 75 \text{ km per jam}$$

$$= 75 \text{ km j}^{-1}$$

$$\text{Laju bas persiaran} = \frac{\text{beza jarak yang dilalui}}{\text{beza masa yang sepadan}}$$

$$= \frac{(0 - 150)\text{ km}}{(3 - 0)\text{ jam}}$$

$$= -50 \text{ km per jam}$$

$$= 50 \text{ km j}^{-1}$$

Tanda negatif bermakna arah gerakan bas persiaran bertentangan dengan arah gerakan kereta.

$$\text{Maka beza laju} = (75 - 50) \text{ km j}^{-1}$$

$$= 25 \text{ km j}^{-1}$$

TIP

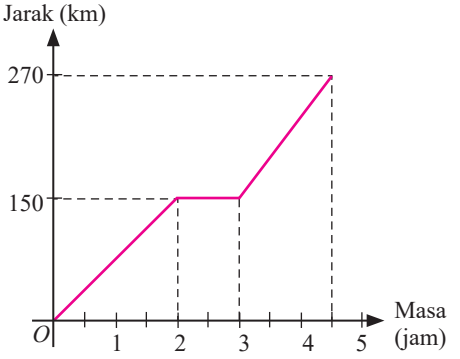
km j^{-1} juga boleh ditulis sebagai km/j

Contoh 5

Graf jarak-masa di sebelah menunjukkan gerakan sebuah kereta untuk tempoh 4.5 jam.

(a) Tentukan
  (i) tempoh masa kereta berada dalam keadaan pegun.
  (ii) laju kereta sejam yang pertama dalam km j^{-1}.

(b) Huraikan gerakan kereta untuk tempoh 90 minit terakhir.



Penyelesaian:

(a) (i) Tempoh keadaan pegun = tempoh kereta berhenti

$$= (3 - 2) \text{ jam}$$

$$= 1 \text{ jam}$$

(ii) Laju kereta sejam yang pertama = laju kereta 2 jam yang pertama

$$= \frac{(150 - 0)\text{ km}}{(2 - 0)\text{ jam}}$$

$$= 75 \text{ km j}^{-1}$$

Dari graf, jarak yang dilalui untuk sejam yang pertama tidak diketahui, maka laju ditentukan dengan jarak yang dilalui untuk 2 jam pertama (nilai kecerunan pada satu garis lurus adalah sama).

(b) Laju kereta $= \dfrac{(270 - 150)\text{ km}}{(4.5 - 3)\text{ jam}}$

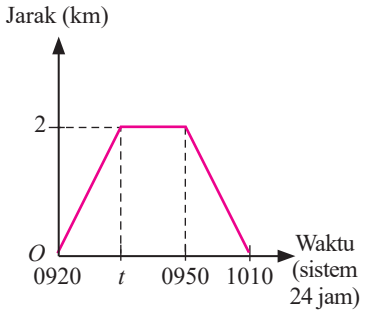
90 minit terakhir

$$= 80 \text{ km j}^{-1}$$

Kereta bergerak sejauh 120 km dengan kelajuan 80 km j^{-1} bagi tempoh 90 minit terakhir.

Contoh 6

Sahana berbasikal ke pejabat pos untuk menghantar kad ucapan Hari Raya Aidilfitri kepada kawan karibnya. Graf jarak-masa di sebelah menunjukkan perjalanan pergi dan balik Sahana dari rumahnya ke pejabat pos.



(a) Tentukan

(i) jumlah jarak keseluruhan perjalanan Sahana dalam km.

(ii) nilai t, jika Sahana berbasikal dengan kelajuan 8 km j^{-1} ke pejabat pos.

(b) Huraikan perjalanan Sahana dari pejabat pos ke rumahnya.

Penyelesaian:

(a) (i) Jumlah jarak = 2 km + 2 km
= 4 km

(b) Kadar perubahan jarak $= \dfrac{(0 - 2)\text{ km}}{\left(\frac{1010 - 0950}{60}\right)\text{ jam}}$

1 minit $= \frac{1}{60}$ jam

$= -6$ km j^{-1}
$= 6$ km j^{-1}

Sahana berbasikal sejauh 2 km dalam tempoh 20 minit dengan kelajuan 6 km j^{-1}.

(ii) Masa $= \dfrac{\text{Jarak}}{\text{Laju}}$
$= \dfrac{2\text{ km}}{8\text{ km j}^{-1}}$
$= 0.25$ jam
$= 15$ minit

Maka, t = 0920 + 0015
= 0935

TIP

Laju $= \dfrac{\text{Jarak}}{\text{Masa}}$

Masa $= \dfrac{\text{Jarak}}{\text{Laju}}$

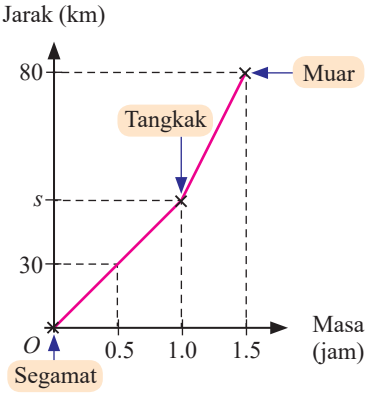
Gerakan dengan kelajuan yang berbeza

Kelajuan suatu gerakan biasanya berubah-ubah sepanjang suatu perjalanan. Dalam situasi ini, **laju purata** digunakan.

$$\text{Laju purata} = \frac{\text{Jumlah jarak yang dilalui}}{\text{Jumlah masa yang diambil}}$$

Contoh 7

Puan Zabedah ingin melawat kawannya yang tinggal di Muar. Graf jarak-masa di sebelah menunjukkan perjalanan Puan Zabedah dengan kereta dari Segamat ke Muar melalui Tangkak.



(a) Hitung laju purata perjalanan Puan Zabedah dari Segamat ke Muar dalam km j^{-1}.

(b) Jika kadar perubahan jarak terhadap masa kereta dari Segamat ke Tangkak ialah 50 km j^{-1}, hitung jarak di antara Tangkak dengan Muar dalam km.

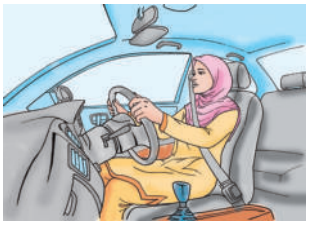
(c) Huraikan gerakan kereta dari Segamat ke Muar.

Penyelesaian:

(a) Laju purata $= \dfrac{\text{Jumlah jarak}}{\text{Jumlah masa}}$

$= \dfrac{80 \text{ km}}{1.5 \text{ j}}$

$= 53\frac{1}{3} \text{ km j}^{-1}$



TIP

Laju = $\dfrac{\text{Jarak}}{\text{Masa}}$

Jarak = Laju x Masa

(b) Jumlah jarak = Laju purata × jumlah masa

$= 50 \text{ km j}^{-1} \times 1 \text{ j}$

$= 50 \text{ km}$

Jarak di antara Segamat dengan Tangkak.

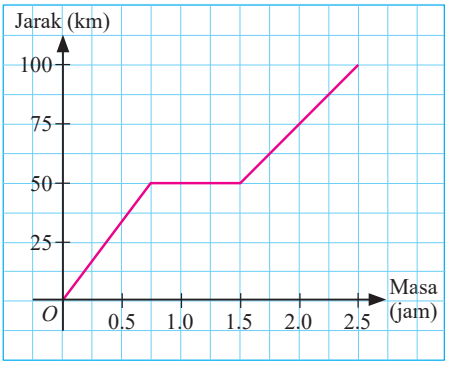
(c) Kereta bergerak sejauh 80 km dalam tempoh 1.5 jam dengan laju purata $53\frac{1}{3} \text{ km j}^{-1}$.

Jarak di antara Tangkak dengan Muar = (80 – 50) km

= 30 km

Praktis Kendiri 7.1b

1. Graf jarak-masa di sebelah menunjukkan perjalanan Encik Rejab dari Kota Kinabalu ke Keningau bersama-sama ahli keluarganya untuk menyambut Pesta Kaamatan dengan menaiki kereta.



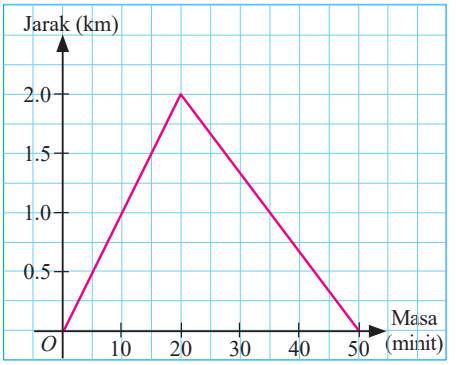
(a) Hitung laju kereta dalam km j^{-1} untuk sejam yang terakhir.

(b) Huraikan gerakan kereta Encik Rejab untuk tempoh 45 minit selepas bergerak sejauh 50 km yang pertama.

(c) (i) Hitung laju purata, dalam km j^{-1} bagi perjalanan dari Kota Kinabalu ke Keningau.

(ii) Seterusnya, huraikan gerakan kereta bagi keseluruhan perjalanan.

2. Encik Rashid bersenam setiap hari untuk menjaga kesihatan dirinya. Graf jarak-masa di sebelah menunjukkan jarak dan masa larian Encik Rashid dari rumahnya ke taman permainan dan balik ke rumahnya semula.

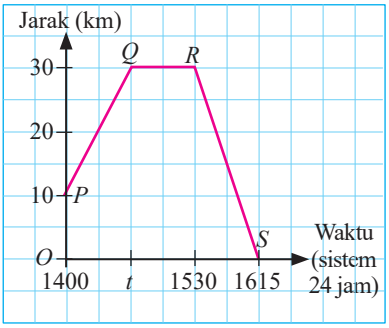


(a) Hitung beza laju larian Encik Rashid dari rumah ke taman permainan dan dari taman permainan ke rumahnya dalam km j^{-1}.

(b) Hitung laju purata keseluruhan larian Encik Rashid dalam km j^{-1}.

(c) Huraikan gerakan Encik Rashid untuk tempoh 50 minit.

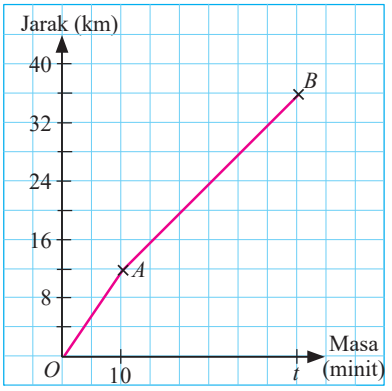
3. Graf jarak-masa di sebelah menunjukkan perjalanan Puan Rozita untuk tempoh $2\frac{1}{4}$ jam dengan memandu keretanya. *PQ* ialah perjalanan Puan Rozita dari tempat kerjanya ke sebuah pasar raya dan *RS* ialah perjalanan balik ke rumahnya.



(a) Hitung nilai t jika laju kereta semasa perjalanan dari tempat kerja ke pasar raya ialah 50 km j^{-1}.

(b) Huraikan gerakan kereta yang mewakili
(i) garis lurus *QR*
(ii) garis lurus *RS*

4. Encik Yusri bekerja di sebuah firma guaman. Setiap hari Encik Yusri akan menghantar anaknya ke sekolah dalam perjalanan ke tempat kerja dengan menaiki kereta. *OA* merupakan perjalanan dari rumah ke sekolah dan *AB* ialah perjalanan dari sekolah ke tempat kerja.



(a) Hitung nilai t, jika kadar perubahan jarak terhadap masa kereta dari sekolah ke tempat kerja ialah 48 km j^{-1}.

(b) Huraikan gerakan kereta bagi keseluruhan perjalanan dari rumah ke tempat kerja.

Bagaimanakah anda menyelesaikan masalah yang melibatkan graf jarak-masa?

Contoh 8

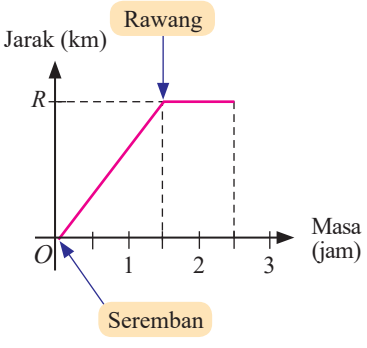
Standard Pembelajaran

Menyelesaikan masalah yang melibatkan graf jarak-masa.

Graf jarak-masa yang tidak lengkap di sebelah menunjukkan perjalanan Encik Tan dari Seremban ke Lumut. Encik Tan berhenti di Rawang untuk makan tengah hari dan rehat seketika sebelum meneruskan perjalanannya ke Lumut.

(a) Jika laju purata kereta Encik Tan dari Seremban ke Rawang ialah 66 $\frac{2}{3}$ km j^{-1}, hitung jarak di antara Seremban dengan Rawang dalam km.

(b) Diberi bahawa jarak di antara Seremban dengan Lumut ialah 300 km dan Encik Tan memandu dengan laju purata 80 km j^{-1} untuk sampai di Lumut dari Rawang. Lengkapkan graf jarak-masa yang diberikan bagi mewakili keseluruhan perjalanan Encik Tan.



Penyelesaian:

Memahami masalah

(a) Menghitung jarak di antara Seremban dengan Rawang dalam km.

(b) Melengkapkan graf jarak-masa dari Rawang ke Lumut.

Merancang strategi

(a) Laju $= \frac{\text{Jarak}}{\text{Masa}}$

Jarak = Laju × Masa

(b) • Menentukan jarak di antara Rawang dengan Lumut.

• Masa $= \frac{\text{Jarak}}{\text{Laju}}$

• Melengkapkan graf jarak-masa.

Melaksanakan strategi

(a) Jarak = Laju × Masa

$= 66\frac{2}{3}$ km j^{-1} × 1.5 jam

= 100 km

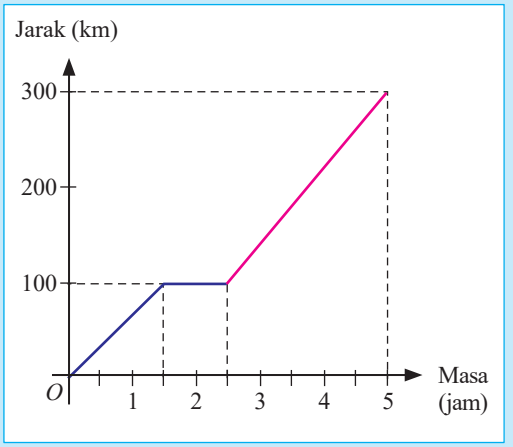
(b) Jarak di antara Rawang dengan Lumut

300 km – 100 km = 200 km

Masa $= \frac{\text{Jarak}}{\text{Laju}}$

$= \frac{200 \text{ km}}{80 \text{ km j}^{-1}}$

= 2.5 jam



Kesimpulan

(a) Jarak di antara Seremban dengan Rawang ialah 100 km.

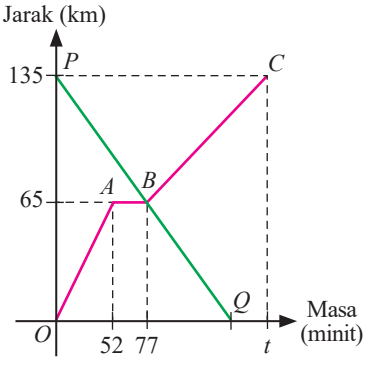
(b) Jarak di antara Rawang dengan Lumut ialah 200 km dan masa yang diambil ialah 2.5 jam.

Contoh 9

Graf jarak-masa di sebelah menunjukkan perjalanan dua buah kereta di antara Kuala Lipis dengan Cameron Highlands. Graf *PBQ* mewakili perjalanan Encik Manaf bersama keluarganya dari Cameron Highlands ke Kuala Lipis untuk menghadiri majlis perkahwinan sepupunya. Graf *OABC* mewakili perjalanan keluarga Encik Raven dari Kuala Lipis ke Cameron Highlands untuk bercuti.

(a) Diberi kadar perubahan jarak terhadap masa bagi *OA* dan *BC* adalah sama. Hitung nilai *t*.

(b) Laju purata perjalanan Encik Manaf ialah 72 km j^{-1}. Hitung beza masa dalam minit kedua-dua perjalanan untuk sampai di destinasi masing-masing.



Penyelesaian:

Memahami masalah

(a) Hitung t iaitu masa dalam minit.

(b) Beza masa perjalanan kedua-dua kereta untuk sampai di destinasi masing-masing.

Merancang strategi

(a) Kecerunan OA = Kecerunan BC

(b) • Masa yang diambil oleh Encik Raven = t.
• Menentukan masa yang diambil oleh Encik Manaf.
• Masa = $\frac{\text{Jarak}}{\text{Laju}}$

Melaksanakan strategi

(a) $$\frac{(65-0)\text{ km}}{(52-0)\text{ minit}} = \frac{(135-65)\text{ km}}{(t-77)\text{ minit}}$$

$$\frac{65}{52} = \frac{70}{t-77}$$

$$t - 77 = \frac{70(52)}{65}$$

$$t = 56 + 77$$

$$t = 133$$

(b) • Jumlah masa perjalanan Encik Raven, $t = 133$ minit.
• Jumlah masa perjalanan Encik Manaf dalam minit.

$$\text{masa} = \frac{135\text{ km}}{72\text{ km j}^{-1}}$$

$$= 1.875\text{ jam} \times 60$$

$$= 112.5\text{ minit}$$

• Beza masa = 133 – 112.5
= 20.5 minit

Kesimpulan

(a) $t = 133$

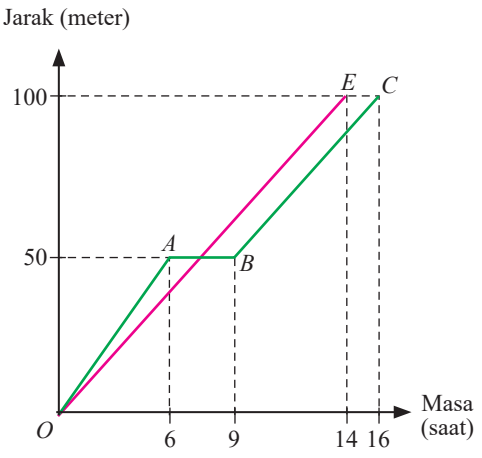
(b) Beza masa kedua-dua perjalanan untuk sampai di destinasi masing-masing ialah 20.5 minit.

Praktis Kendiri 7.1c

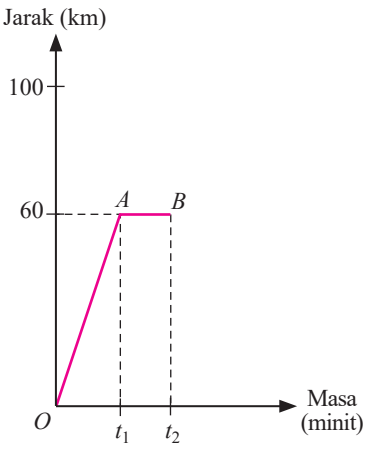
1. Graf jarak-masa di sebelah menunjukkan masa yang diambil oleh dua orang peserta terbaik dalam acara 100 m semasa kejohanan olahraga di SMK Sinar Harapan. Graf OE mewakili larian Rizal dan graf $OABC$ mewakili larian Jeffery. AB ialah masa yang diambil oleh Jeffrey sebelum meneruskan lariannya kerana terjatuh.

(a) Hitung kerugian masa dalam saat, yang dialami oleh Jeffery dalam pertandingan.

(b) Adakah Jeffrey berpeluang untuk menjadi johan dalam acara 100 m jika dia tidak jatuh dan mengekalkan kelajuannya sepanjang larian? Berikan justifikasi anda.



2. Graf jarak-masa yang tidak lengkap di sebelah mewakili perjalanan Encik Jumali sejauh 100 km.



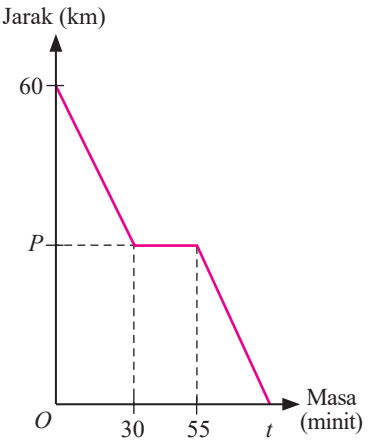
(a) Diberi kadar perubahan jarak terhadap masa untuk 60 km yang pertama ialah 72 km j^{-1}. Tentukan nilai t_1.

(b) Jika kereta Encik Jumali berada dalam keadaan pegun selama 20 minit, hitung nilai t_2.

(c) Perjalanan diteruskan dari B ke destinasi dengan laju purata 75 km j^{-1}. Lengkapkan graf jarak-masa untuk keseluruhan perjalanan Encik Jumali.

(d) Jika perjalanan dari O dimulakan pada pukul 9:30 pagi, hitung waktu Encik Jumali sampai di destinasinya.

3. Encik Jamal ke Padang Besar bersama keluarganya. Semasa perjalanan pulang ke Jitra, mereka singgah di Bukit Kayu Hitam untuk minum petang. Graf jarak-masa di sebelah menunjukkan perjalanan pulang dari Padang Besar ke Jitra.



(a) Hitung tempoh masa kereta Encik Jamal berada dalam keadaan pegun.

(b) Diberi laju purata perjalanan dari Padang Besar Bukit ke Kayu Hitam ialah 66 km j^{-1}.

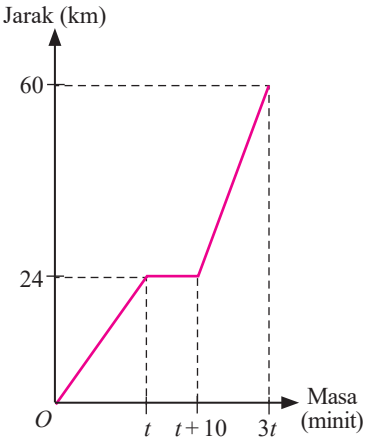
(i) Tentukan nilai P.

(ii) Hitung jarak di antara Padang Besar dengan Bukit Kayu Hitam.

(c) Jika Encik Jamal memandu dengan laju purata 64.8 km j^{-1} semasa perjalanan pulang ke rumahnya di Jitra dari Bukit Kayu Hitam, hitung nilai t.

(d) Hitung laju purata keseluruhan perjalanan dalam km j^{-1}.

4. Graf jarak-masa di sebelah menunjukkan perjalanan Encik Moorthy sejauh 60 km dalam masa $3t$ minit dengan memandu kereta. Diberi kadar perubahan jarak terhadap masa sebelum dan selepas tempoh masa rehat adalah sama.



(a) Hitung nilai t.

(b) Hitung laju purata keseluruhan perjalanan Encik Moorthy dalam km j^{-1}.

(c) Huraikan gerakan kereta selepas berada dalam keadaan pegun.

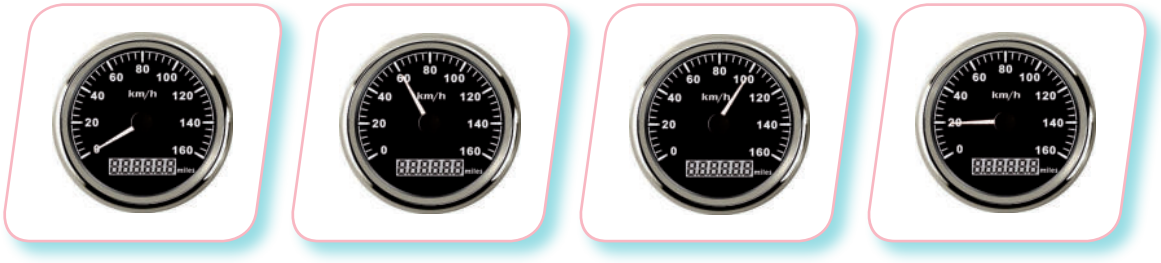
7.2 Graf Laju-Masa

Apakah yang anda faham tentang graf laju-masa?

Standard Pembelajaran

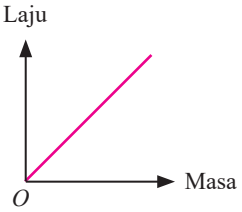
Melukis graf laju-masa.

Pernahkah anda melihat gerakan jarum pada meter laju (*speedometer*) kereta semasa bapa atau ibu anda memandu kereta? Jarum yang menunjukkan nilai kelajuan akan berubah apabila pedal minyak atau pedal brek ditekan. Teliti rajah-rajah meter laju di bawah.



Rajah 1 Rajah 2 Rajah 3 Rajah 4

Jarum pada Rajah 1 menunjukkan nilai 0, bermaksud kenderaan berada dalam keadaan pegun. Pertambahan nilai pada Rajah 2 dan Rajah 3 bermaksud kelajuan kenderaan semakin bertambah. Kelajuan pada Rajah 4 berkurangan berbanding Rajah 3 dalam tempoh masa tertentu. Kadar perubahan laju suatu gerakan boleh digambarkan dengan melukis graf laju-masa.



Pada suatu graf laju-masa:

- Paksi mencancang mewakili laju suatu gerakan.
- Paksi mengufuk mewakili tempoh masa yang diambil.
- Kecerunan graf mewakili **kadar perubahan laju terhadap masa,** iaitu **pecutan.**

Bagaimanakah anda melukis graf laju-masa?

Graf laju-masa boleh dilukis jika maklumat berkaitan suatu gerakan seperti berikut diperoleh.

(a) Jadual laju-masa.
(b) Persamaan yang mewakili hubungan antara laju dengan masa.

Bagaimanakah anda melukis graf laju-masa berdasarkan jadual laju-masa?

Contoh 10

Jadual di bawah menunjukkan perubahan laju kereta Encik Azizul untuk tempoh masa 5 saat. Lukis graf laju-masa berdasarkan jadual yang diberi.

Masa (saat)	0	1	2	3	4	5
Laju ($m\ s^{-1}$)	0	10	20	30	40	50

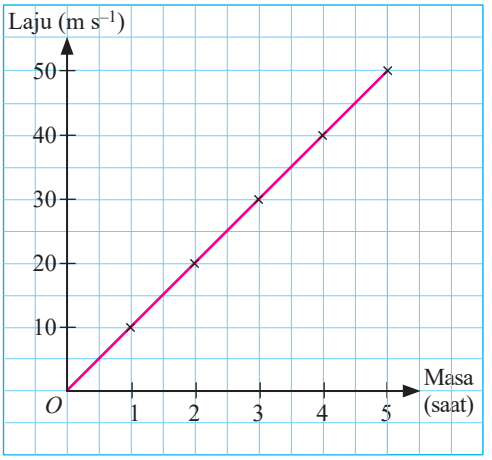
Penyelesaian:

Langkah

(a) Pilih skala yang sesuai bagi mewakili laju dan masa yang diberi.

(b) Plot titik yang mewakili pasangan nilai laju dan masa pada kertas grid atau kertas graf.

(c) Sambungkan titik-titik yang diplot dengan menggunakan pembaris untuk memperoleh graf laju-masa seperti di sebelah.



Contoh 11

Kadar perubahan laju terhadap masa sebuah kapal terbang yang sedang mendarat diberi oleh persamaan $v = 800 - 1\,600t$ dengan keadaan v ialah laju dalam km j^{-1} dan t ialah masa dalam jam. Lukis satu graf laju-masa yang mewakili pendaratan kapal terbang tersebut untuk tempoh $0 \leqslant t \leqslant 0.5$.

Penyelesaian:

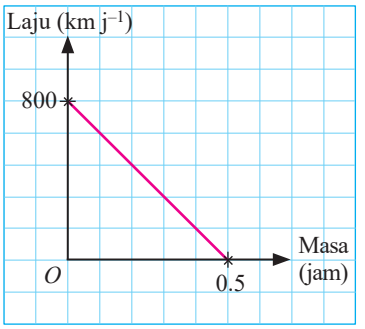
Langkah

(a) Bina satu jadual laju-masa seperti di bawah dengan menggunakan persamaan $v = 800 - 1\,600t$.

Masa, t (jam)	0	0.5
Laju, v (km j^{-1})	800	0

$v = 800 - 1\,600t$ apabila $t = 0$, $v = 800 - 1600(0)$ $v = 800$

$v = 800 - 1\,600t$ apabila $t = 0.5$, $v = 800 - 1\,600(0.5)$ $v = 0$



(b) Lukis graf laju-masa dengan memplotkan titik berdasarkan jadual yang dibina.

TIP

Sekurang-kurangnya dua titik mencukupi untuk melukis graf garis lurus.

Praktis Kendiri 7.2a

1. Lukis graf laju-masa berdasarkan jadual yang diberikan.

(a)

Masa (saat)	0	1	2	3	4	5
Laju (m s^{-1})	3	4	5	6	7	8

(b)

Masa (minit)	0	1	2	3	4
Laju (km min^{-1})	30	25	20	15	10

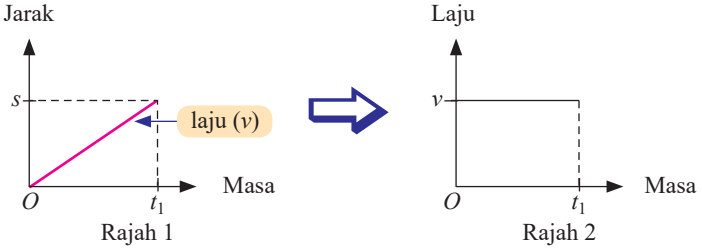
2. Lukis suatu graf laju-masa dengan membina jadual laju-masa bagi persamaan berikut. Diberi v ialah laju dalam m s^{-1} dan t ialah masa dalam saat.

(a) $v = 60 - 2t$; $0 \leqslant t \leqslant 30$.

(b) $v = 3t$; $0 \leqslant t \leqslant 5$.

Apakah kaitan antara luas di bawah graf laju-masa dengan jarak yang dilalui?

Rajah di bawah menunjukkan dua graf.



Standard Pembelajaran

Membuat perkaitan antara luas di bawah graf laju-masa dengan jarak yang dilalui dan seterusnya menentukan jarak.

Daripada kecerunan graf jarak-masa pada Rajah 1, kita boleh menentukan laju suatu gerakan. Maklumat daripada graf jarak-masa ini boleh digunakan untuk melukis graf laju-masa seperti pada Rajah 2. Tahukah anda, jarak, s suatu gerakan boleh ditentukan daripada graf laju-masa?

MEMORI SAYA

$\text{Laju} = \frac{\text{Jarak}}{\text{Masa}}$

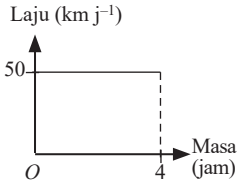
Jarak = Laju x Masa

Rangsangan Minda 1

Tujuan: Menentukan kaitan antara luas di bawah graf laju-masa dengan jarak yang dilalui.

Langkah:

1. Bahagikan murid kepada beberapa kumpulan yang sesuai.
2. Baca dan fahami setiap pernyataan yang diberikan. Hitung laju purata dalam km j^{-1}.
3. Lakar graf laju-masa berdasarkan pernyataan yang diberikan.
4. Hitung luas di bawah graf laju-masa dan jarak gerakan seperti pada contoh (a).

Pernyataan	Graf laju-masa	Luas di bawah graf	Jarak
(a) Encik Faizal memandu sejauh 200 km dalam masa 4 jam. $\text{Laju} = \frac{200\text{ km}}{4\text{ jam}}$ $= 50\text{ km j}^{-1}$		Luas $= 4\text{ j} \times 50\text{ km j}^{-1}$ $= 200\text{ km}$	Jarak = laju × masa $= 50\text{ km j}^{-1} \times 4\text{ j}$ $= 200\text{ km}$
(b) Sebuah bas persiaran bergerak 150 km dalam masa 2 jam.			
(c) Puan Malini berkayuh basikal sejauh 8 km dalam masa 40 minit.			
(d) Encik Gomez berlari sejauh 4 km dalam masa 30 minit.			

Perbincangan:

1. Apakah kaitan antara luas di bawah graf dengan jarak yang dilalui?
2. Bentang hasil dapatan melalui aktiviti Galeri Jelajah Minda (*Gallery Walk*).
3. Adakah dapatan kumpulan anda sama dengan kumpulan lain?

Hasil daripada Rangsangan Minda 1, didapati bahawa;

> Nilai luas di bawah graf laju-masa adalah sama dengan jumlah jarak yang dilalui bagi tempoh masa yang sama.

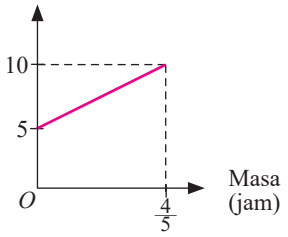
Secara generalisasi,

> Graf laju-masa:
> Luas di bawah graf = Jarak yang dilalui

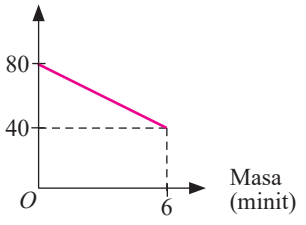
Contoh 12

Hitung jarak yang dilalui oleh setiap gerakan berdasarkan graf laju-masa berikut.

(a)



(b)

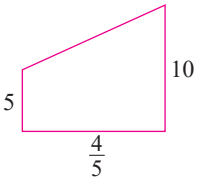


Indikator

Pastikan unit yang digunakan untuk masa pada laju dan masa adalah sama.

Penyelesaian:

(a)

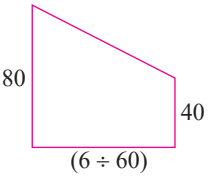


Jarak = luas trapezium

$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{5}\right) \text{ j} \times (5 + 10) \text{ km j}^{-1}$

$= 6 \text{ km}$

(b)



Jarak = luas trapezium

$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{6}{60}\right) \text{ j} \times (40 + 80) \text{ km j}^{-1}$

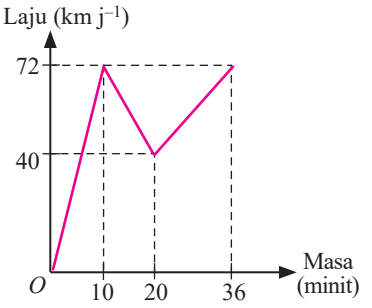
$= 6 \text{ km}$

Contoh 13

Graf laju-masa di sebelah menunjukkan kelajuan kereta Puan Liew dalam tempoh 36 minit. Hitung,

(a) jumlah jarak, dalam km, yang dilalui oleh Puan Liew dalam tempoh 36 minit.

(b) laju purata, dalam km j^{-1}, kereta Puan Liew dalam tempoh 36 minit.



Penyelesaian:

(a) Jumlah jarak
= luas di bawah graf
$= \left[\frac{1}{2} \times \left(\frac{10}{60}\right)\text{j} \times 72 \text{ km j}^{-1}\right] + \left[\frac{1}{2} \times \left(\frac{10}{60}\right)\text{j} \times (40 + 72) \text{ km j}^{-1}\right] + \left[\frac{1}{2} \times \left(\frac{16}{60}\right)\text{j} \times (40 + 72) \text{ km j}^{-1}\right]$
$= \left(6 + \frac{28}{3} + \frac{224}{15}\right)\text{km}$
$= 30.27 \text{ km}$

(b) Laju purata $= \frac{\text{Jumlah jarak}}{\text{Jumlah masa}}$
$= \frac{30.27 \text{ km}}{(36 \div 60)\text{ j}}$
$= 50.45 \text{ km j}^{-1}$

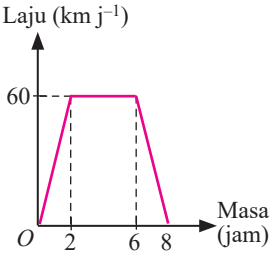
MEMORI SAYA

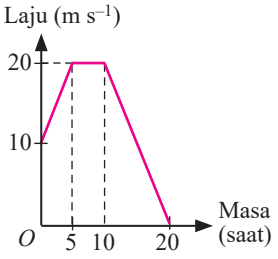
60 minit = 1 jam

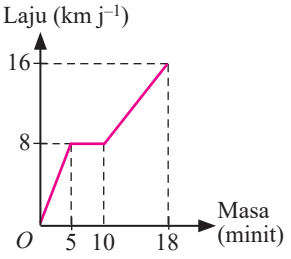
1 minit = $\frac{1}{60}$ jam

Praktis Kendiri 7.2b

1. Hitung jarak, dalam km, yang dilalui oleh setiap gerakan berdasarkan graf laju-masa yang diberikan.

(a)


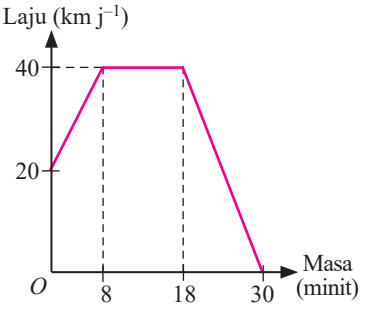
(b)


(c)


2. Graf laju-masa di sebelah menunjukkan kelajuan motosikal Encik Mustaffa untuk tempoh masa 30 minit semasa menjemput anaknya dari kelas tambahan. Hitung,

(a) jumlah jarak, dalam km, yang dilalui dalam tempoh 30 minit.

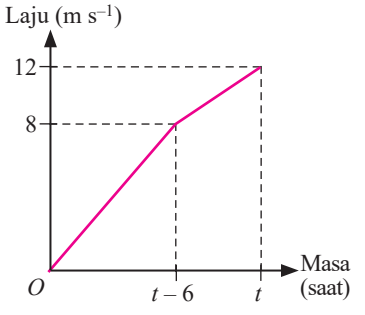
(b) laju purata, dalam km j^{-1}, motosikal Encik Mustaffa untuk tempoh 30 minit.



3. Sarves menyertai pertandingan larian 100 m semasa kejohanan olahraga di sekolahnya. Graf laju-masa di sebelah menunjukkan kelajuan larian Sarves sehingga garisan penamat. Hitung,

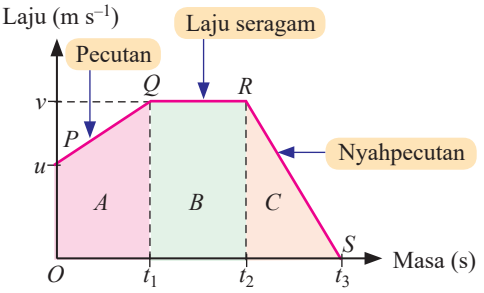
(a) nilai t.

(b) laju purata larian Sarves dalam km j^{-1}.



Bagaimanakah anda mentafsir graf laju-masa?

Teliti graf laju-masa di bawah.



Tafsiran graf laju-masa.

PQ ⇨ **Kelajuan objek bertambah** dari u m s^{-1} ke v m s^{-1}.

⇨ Kecerunan graf bernilai positif, maka kadar perubahan laju terhadap masa bernilai positif.

⇨ **Pecutan** = $\dfrac{\text{Perubahan laju}}{\text{Perubahan masa}}$

⇨ **Luas** trapezium A, iaitu luas di bawah graf PQ mewakili **jarak** yang dilalui dalam tempoh t_1 saat.

QR ⇨ **Tidak ada perubahan laju** terhadap masa (kecerunan sifar).

⇨ Objek bergerak dengan **laju seragam**.

⇨ Luas segi empat tepat B, iaitu luas di bawah graf QR mewakili jarak yang dilalui dalam tempoh $(t_2 - t_1)$ saat.

RS ⇨ **Kelajuan objek berkurang**.

⇨ Kecerunan graf bernilai negatif, maka kadar perubahan laju terhadap masa bernilai negatif.

⇨ **Nyahpecutan** = $\dfrac{\text{Perubahan laju}}{\text{Perubahan masa}}$

⇨ Tidak ada perubahan arah, iaitu gerakan objek kekal pada arah yang sama.

⇨ Luas segi tiga C, iaitu luas di bawah graf RS mewakili jarak yang dilalui dalam tempoh $(t_3 - t_2)$ saat.

Standard Pembelajaran

Mentafsir graf laju-masa dan menghuraikan gerakan berdasarkan graf tersebut.

ZON INFORMASI

Jarak
- **Ukuran jauh** atau ruang di antara dua titik.

Sesaran
- **Jarak** vektor dari suatu titik tetap diukur dalam **arah tertentu**.

ZON INFORMASI

Laju
- Kadar perubahan jarak terhadap masa.
- Laju = $\dfrac{\text{Jarak}}{\text{Masa}}$

Halaju
- Kadar perubahan sesaran objek pada arah tertentu terhadap masa.
- Halaju = $\dfrac{\text{Sesaran}}{\text{Masa}}$

MEMORI SAYA

Laju = $\dfrac{\text{Jarak}}{\text{Masa}}$

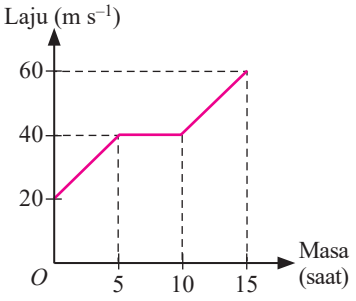
Pecutan = $\dfrac{\text{Laju}}{\text{Masa}}$

Indikator

Arah gerakan suatu objek kekal semasa pecutan atau nyahpecutan.

Contoh 14

Graf laju-masa di sebelah menunjukkan gerakan kereta Puan Salina dalam tempoh 15 saat.



(a) Hitung kadar perubahan laju terhadap masa dalam m s^{-2}, bagi 5 saat yang pertama.

(b) Huraikan gerakan kereta bagi tempoh 5 saat yang kedua.

(c) Hitungkan jumlah jarak, dalam meter, yang dilalui dalam tempoh 15 saat.

Penyelesaian:

(a) Kadar perubahan laju $= \dfrac{\text{Perubahan laju}}{\text{Perubahan masa}}$

$= \dfrac{(40 - 20)\text{ m s}^{-1}}{(5 - 0)\text{ s}}$

$= 4\text{ m s}^{-2}$

(b) Kereta bergerak dengan laju seragam 40 m s^{-1} untuk tempoh 5 saat.

(c) Jumlah jarak = luas di bawah graf

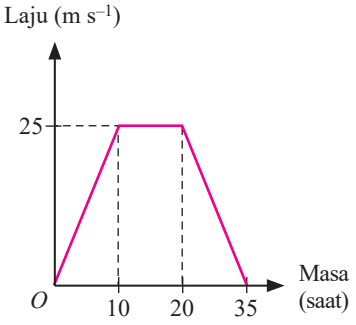
$= \left[\frac{1}{2} \times 5 \times (20 + 40)\right] + [(10 - 5) \times 40] + \left[\frac{1}{2} \times (15 - 10) \times (40 + 60)\right]$

$= (150 + 200 + 250)\text{ m}$

$= 600\text{ m}$

Contoh 15

Encik Daniel Wong memandu kereta ke kedai serbaneka untuk membeli surat khabar. Graf laju-masa di sebelah menunjukkan gerakan kereta Encik Daniel Wong dari rumah ke persimpangan jalan sebelum sampai di kedai serbaneka tersebut.



(a) Huraikan gerakan kereta Encik Daniel Wong untuk tempoh 10 saat yang pertama.

(b) Apakah yang berlaku terhadap gerakan kereta Encik Daniel Wong dari saat ke-10 hingga saat ke-20?

(c) Hitung kadar perubahan laju terhadap masa dalam m s^{-2}, bagi 5 saat terakhir.

(d) Hitung jarak, dalam meter yang dilalui semasa nyahpecutan dan huraikan gerakan kereta pada tempoh tersebut.

Penyelesaian:

(a) Kadar perubahan laju terhadap masa untuk 10 saat yang pertama

$= \dfrac{\text{Perubahan laju}}{\text{Perubahan masa}}$

$= \dfrac{(25 - 0)\text{ m s}^{-1}}{10 - 0\text{ s}}$

$= 2.5\text{ m s}^{-2}$

Kereta mengalami pecutan dengan kadar 2.5 m s^{-2} dalam tempoh 10 saat.

(b) Kereta Encik Wong bergerak dengan laju seragam 25 m s^{-1} dari saat ke-10 hingga saat ke-20.

(c) Kadar perubahan laju $= \dfrac{(0 - 25)\text{ m s}^{-1}}{(35 - 20)\text{ s}}$

Kadar perubahan laju terhadap masa untuk 5 saat terakhir sama dengan 15 saat terakhir.

$= -\dfrac{5}{3}\text{ m s}^{-2}$

Jawapan boleh ditulis sebagai
- pecutan $= -\dfrac{5}{3}\text{ m s}^{-2}$ atau
- nyahpecutan $= \dfrac{5}{3}\text{ m s}^{-2}$

(d) Jarak yang dilalui semasa nyahpecutan = jarak dalam 15 saat terakhir

$= \dfrac{1}{2} \times (35 - 20) \times 25$

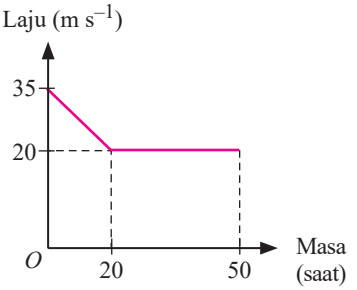
$= \left[\dfrac{1}{2} \times 15 \times 25\right]\text{ m}$

$= 187.5\text{ m}$

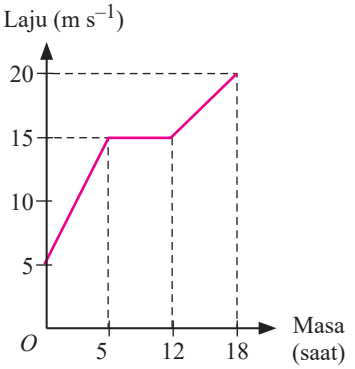
Kereta bergerak sejauh 187.5 m dalam tempoh 15 saat dengan nyahpecutan $\dfrac{5}{3}\text{ m s}^{-2}$.

Praktis Kendiri 7.2c

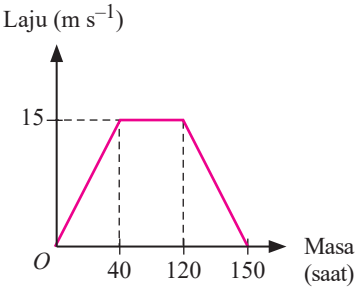
1. Graf laju-masa di sebelah menunjukkan gerakan sebuah motosikal untuk tempoh 50 saat. Huraikan gerakan motosikal
(a) untuk 20 saat yang pertama.
(b) semasa laju seragam.



2. Graf laju-masa di sebelah menunjukkan gerakan suatu zarah dalam tempoh 18 saat.
(a) Hitung pecutan zarah, dalam m s^{-2}, untuk 6 saat terakhir.
(b) Hitung jumlah jarak, dalam meter, yang dilalui oleh zarah tersebut dalam tempoh 18 saat.
(c) Huraikan gerakan zarah semasa laju seragam.



3. Encik Merisat melawat kawannya yang tinggal di kawasan perumahan yang sama dengan menaiki kereta. Graf laju-masa di sebelah menunjukkan gerakan Encik Merisat ke rumah kawannya.
(a) Hitung kadar perubahan laju terhadap masa bagi 20 saat yang pertama.
(b) Hitung jarak dalam meter, yang dilalui semasa laju seragam.
(c) Huraikan perjalanan Encik Merisat untuk tempoh 2.5 minit.



Bagaimanakah anda menyelesaikan masalah yang melibatkan graf laju-masa?

Contoh 16

Standard Pembelajaran

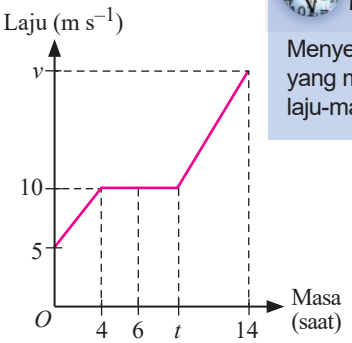
Menyelesaikan masalah yang melibatkan graf laju-masa.

Graf laju-masa di sebelah menunjukkan gerakan sebuah kereta untuk tempoh 14 saat. Hitung,

(a) laju purata dalam m s^{-1} untuk tempoh 6 saat yang pertama.

(b) nilai t, jika jarak yang dilalui oleh kereta untuk tempoh 4 saat yang pertama ialah separuh daripada jarak yang dilalui dengan laju seragam.

(c) nilai v, jika pecutan bagi 2 saat terakhir ialah 3.5 m s^{-2}.



Penyelesaian:

Memahami masalah

(a) Laju purata untuk 6 saat pertama.

(b) Nilai t, iaitu masa gerakan dengan laju seragam berakhir.

(c) Nilai v, iaitu laju akhir apabila pecutan bernilai 3.5 m s^{-2}.

Merancang strategi

(a) Laju purata $= \dfrac{\text{Jumlah jarak}}{\text{Jumlah masa}}$

(b) Jarak 4 saat pertama $= \dfrac{1}{2}$ (jarak dengan laju seragam)

(c) Pecutan $= \dfrac{\text{Perubahan laju}}{\text{Perubahan masa}}$

Melaksanakan strategi

(a) Jumlah jarak untuk 6 saat pertama

$$= \left[\frac{1}{2} \times 4 \times (5 + 10)\right] + [(6 - 4) \times 10]$$

$$= (30 + 20) \text{ m}$$

$$= 50 \text{ m}$$

$$\text{Laju purata} = \frac{50 \text{ m}}{6 \text{ s}}$$

$$= \frac{25}{3} \text{ m s}^{-1}$$

(b) Luas trapezium $= \dfrac{1}{2}$ luas segi empat tepat

$$\frac{1}{2} \times 4 \times (5 + 10) = \frac{1}{2} \times (t - 4) \times 10$$

$$30 = 5t - 20$$

$$50 = 5t$$

$$t = 10$$

(c) Pecutan $= 3.5$ m s^{-2}

$$\frac{v - 10}{14 - 10} = 3.5$$

$$\frac{v - 10}{4} = 3.5$$

$$v - 10 = 14$$

$$v = 24$$

Kesimpulan

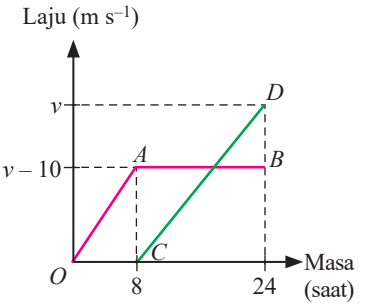
(a) Laju purata untuk tempoh 6 saat yang pertama ialah $\dfrac{25}{3}$ m s^{-1}.

(b) $t = 10$

(c) $v = 24$

Contoh 17

Graf laju-masa di sebelah menunjukkan gerakan dua buah kenderaan. Graf *OAB* mewakili gerakan kereta Encik Zabadi dan graf *CD* mewakili gerakan teksi yang dipandu oleh Encik Low. Diberi beza jarak di antara kereta dengan teksi bagi tempoh 24 saat ialah 160 m. Hitung nilai *v*.



Penyelesaian:

Memahami masalah

- Nilai *v*, iaitu laju akhir teksi untuk tempoh 16 saat.

Merancang strategi

- Jarak kereta – jarak teksi = 160 m

Melaksanakan strategi

$$\text{jarak kereta } (OAB) - \text{jarak teksi } (CD) = 160$$

$$\left[\frac{1}{2} \times (v - 10) \times (24 + 16)\right] - \left[\frac{1}{2} \times (24 - 8) \times (v)\right] = 160$$

$$\left[\frac{1}{2} \times (v - 10) \times 40\right] - \left[\frac{1}{2} \times 16 \times v\right] = 160$$

$$20v - 200 - 8v = 160$$

$$12v = 360$$

$$v = 30$$

Kesimpulan

Nilai $v = 30$

Semak Jawapan

- Jarak yang dilalui oleh kereta
  $= \frac{1}{2} \times (30 - 10) \times (24 + 16)$
  $= 400$ m
- Jarak yang dilalui oleh teksi
  $= \frac{1}{2} \times 16 \times 30$
  $= 240$ m

Beza jarak
= 400 – 240
= 160 m

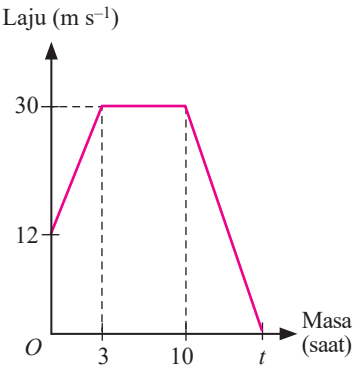
Contoh 18

Graf laju-masa di sebelah menunjukkan gerakan sebuah van dalam tempoh *t* saat. Hitung

(a) kadar perubahan laju terhadap masa dalam m s^{-1} untuk 3 saat yang pertama.

(b) jarak yang dilalui, dalam meter, untuk tempoh 10 saat yang pertama.

(c) nilai *t* jika magnitud kadar perubahan laju terhadap masa selepas saat ke sepuluh adalah sama dengan magnitud kadar perubahan laju pada 3 saat yang pertama.



Penyelesaian:

(a) Kadar perubahan laju $= \dfrac{(30 - 12) \text{ m s}^{-1}}{(3 - 0) \text{ s}}$

$= 6 \text{ m s}^{-2}$

(b) Jarak yang dilalui $= \left[\frac{1}{2} \times 3 \times (12 + 30)\right] + [(10 - 3) \times 30]$
$= (63 + 210)$ m
$= 273$ m

(c) Pecutan selepas saat ke-10 = pecutan pada 3 *s* yang pertama

$$-\left[\frac{(0 - 30) \text{ m s}^{-1}}{(t - 10) \text{ s}}\right] = \frac{(30 - 12) \text{ m s}^{-1}}{(3 - 0) \text{ s}}$$

$$-\left(\frac{-30}{t - 10}\right) = \frac{18}{3}$$

$$\frac{30}{t - 10} = 6$$

$$\frac{30}{6} = t - 10$$

$$t = 15$$

Kadar perubahan laju pada arah yang sama. (magnitud)

ZON INFORMASI

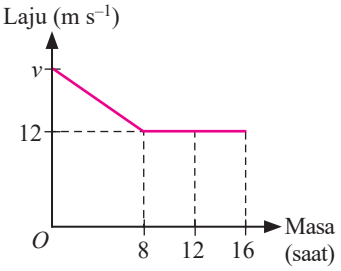
Magnitud
- jarak yang dilalui pada arah tertentu.

Praktis Kendiri 7.2d

1. Graf laju-masa di sebelah menunjukkan gerakan kereta Dion Johan untuk tempoh 16 saat. Hitung,

(a) jarak dalam meter, yang dilalui semasa kereta bergerak dengan laju seragam.

(b) nilai *v*, jika laju purata kereta untuk 12 saat yang pertama ialah 14 m s^{-1}.

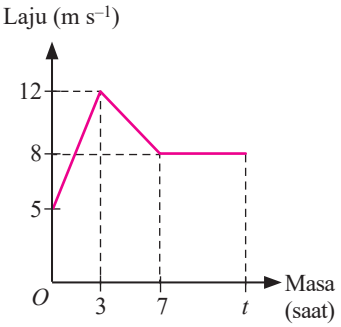


2. Graf laju-masa di sebelah mewakili gerakan motosikal yang dipandu oleh Abit Lusang untuk tempoh *t* saat. Hitung,

(a) nyahpecutan gerakan dalam m s^{-2}.

(b) jarak dalam meter semasa kadar perubahan laju terhadap masa adalah bernilai positif.

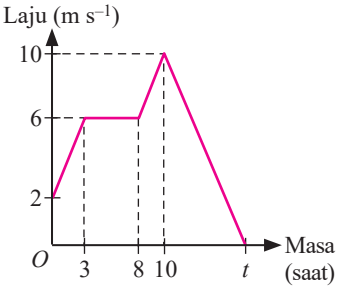
(c) nilai *t*, jika jumlah jarak yang dilalui untuk tempoh *t* saat ialah 121.5 m.



3. Graf laju-masa di sebelah menunjukkan gerakan sebuah kereta untuk tempoh *t* saat. Hitung,

(a) jumlah jarak, dalam meter, yang dilalui semasa kadar perubahan laju terhadap masa kereta tersebut bernilai positif.

(b) nilai *t* jika magnitud kadar perubahan laju terhadap masa dari saat ke-8 hingga saat ke-10 adalah sama dengan magnitud kadar perubahan laju terhadap masa selepas saat ke-10.



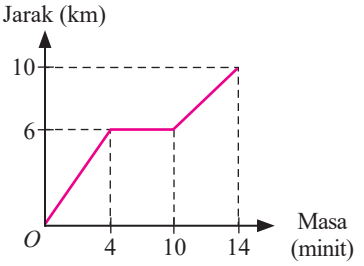
Praktis Komprehensif

1. Graf jarak-masa di sebelah menunjukkan gerakan sebuah bas ekspres dalam masa 14 minit. Hitung,

(a) tempoh masa bas tersebut berada dalam keadaan pegun.

(b) kadar perubahan jarak terhadap masa untuk 4 minit yang terakhir dalam km j^{-1}.

(c) laju purata bas untuk tempoh 14 minit dalam km j^{-1}.

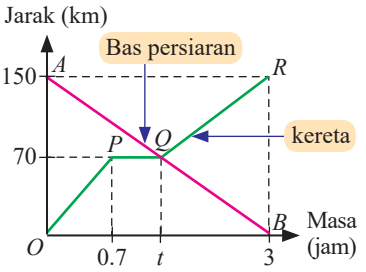


2. Sebuah kereta dan sebuah bas persiaran bergerak sejauh 150 km dalam masa 3 jam. Graf jarak-masa di sebelah menunjukkan gerakan kedua-dua kereta dan bas persiaran tersebut. Hitung,

(a) kadar perubahan jarak terhadap masa kereta, dalam km j^{-1} untuk 42 minit yang pertama.

(b) nilai t.

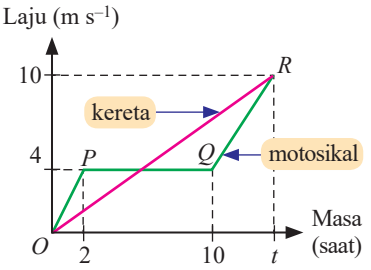
(c) kadar perubahan jarak terhadap masa kereta dalam km j^{-1} untuk gerakan 80 km terakhir.



3. Graf laju-masa di sebelah menunjukkan gerakan sebuah kereta dan sebuah motosikal. Hitung,

(a) tempoh masa motosikal bergerak dengan laju seragam.

(b) nilai t, jika jarak yang dilalui oleh kereta dan motosikal adalah sama untuk tempoh t saat.

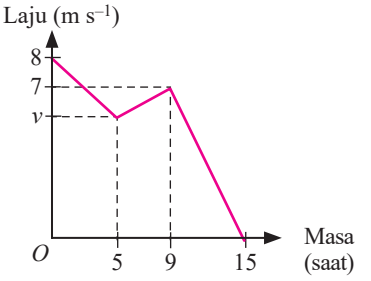


4. Graf laju-masa di sebelah menunjukkan gerakan bagi suatu zarah dalam tempoh 15 saat. Hitung,

(a) kadar perubahan laju terhadap masa, dalam m s^{-2}, untuk tempoh 6 saat terakhir.

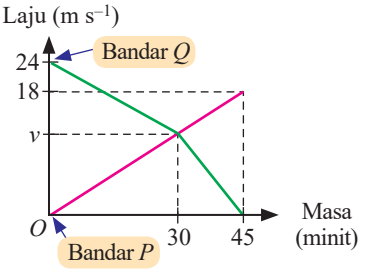
(b) nilai v jika nisbah jarak yang dilalui untuk tempoh 5 saat yang pertama kepada 6 saat terakhir ialah 5 : 3.

(c) laju purata zarah untuk tempoh 15 saat dalam km j^{-1}.



5. Graf laju-masa di sebelah menunjukkan gerakan dua buah kereta untuk tempoh 45 minit. Puan Nisha sedang memandu dari Bandar P ke Bandar Q sementara Puan Farah memandu dari arah yang bertentangan dengan Puan Nisha. Hitung,

(a) nilai v, jika kadar perubahan laju terhadap masa kereta Puan Farah untuk tempoh 30 minit yang pertama adalah sama dengan pecutan kereta Puan Nisha untuk tempoh 45 minit.



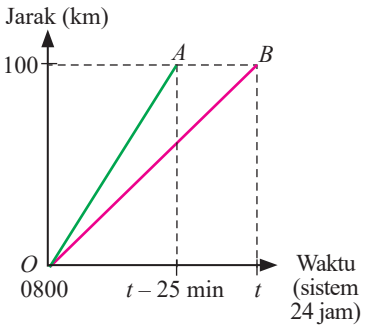
(b) jarak dari Bandar Q, dalam km, apabila kedua-dua kereta tersebut berselisih.

(c) masa, dalam minit yang diambil oleh Puan Nisha untuk sampai di Bandar Q jika pecutan keretanya tidak berubah.

6. Graf jarak-masa di sebelah menunjukkan gerakan dua buah kereta sejauh 100 km. Graf OA menunjukkan gerakan kereta yang dipandu oleh Encik Lee dengan laju purata v km j^{-1} dan graf OB ialah gerakan kereta yang dipandu oleh Encik Dollah dengan laju purata $(v - 20)$ km j^{-1}. Hitung,

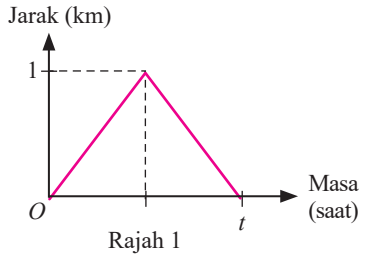
(a) nilai v jika beza masa yang diambil oleh Encik Lee dan Encik Dollah untuk sampai di destinasi ialah 25 minit.

(b) waktu, dalam sistem 24 jam Encik Lee sampai di destinasinya.



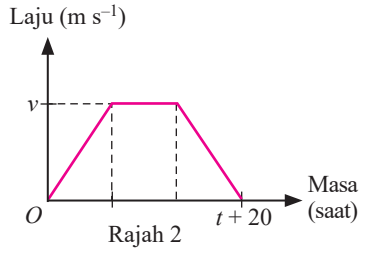
7. (a) (i) Rajah 1 menunjukkan graf jarak-masa kereta A untuk tempoh t saat. Diberi laju purata kereta A ialah 25 m s^{-1}. Hitung nilai t.

(ii) Huraikan gerakan kereta A untuk tempoh t saat.



Rajah 1

(b) Rajah 2 menunjukkan graf laju-masa kereta B. Diberi bahawa, laju seragam, v, kereta B adalah sama dengan laju purata kereta A dan jarak yang dilalui oleh kedua-dua buah kereta adalah sama. Jika nilai t, dalam saat untuk kedua-dua graf adalah sama, hitung tempoh masa, dalam minit, kereta B bergerak dengan laju seragam.



Rajah 2

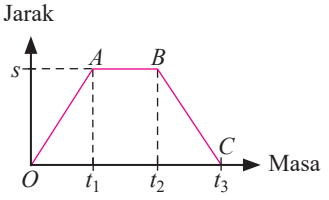
PROJEK

1. Dapatkan maklumat tentang pelbagai nilai had laju yang terdapat di kawasan tempat tinggal anda.
2. Catatkan nilai had laju mengikut kawasan tertentu. Contohnya, 30 km j^{-1} di kawasan sekolah.
3. Apakah implikasi jika pemandu kenderaan tidak mematuhi had laju yang ditetapkan?
4. Buat satu laporan bergambar dan bentangkan dapatan anda dengan menggunakan multimedia.

PETA KONSEP

Graf Gerakan

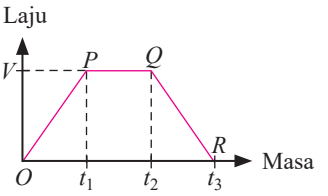
Graf Jarak-Masa



- Kecerunan = $\frac{\text{Perubahan jarak}}{\text{Perubahan masa}}$

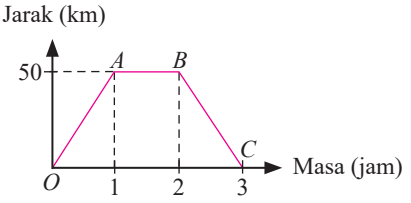
  Kadar perubahan jarak terhadap masa = laju
- *OA* ⇨ kecerunan positif (gerakan menuju destinasi)
- *AB* ⇨ kecerunan sifar (pegun)
- *BC* ⇨ kecerunan negatif (gerakan menuju ke asal)
- Laju positif dan laju negatif menunjukkan arah yang bertentangan dalam suatu gerakan.

Graf Laju-Masa



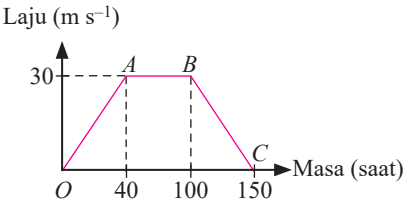
- Jarak gerakan = Luas di bawah graf
- Kecerunan = $\frac{\text{Perubahan laju}}{\text{Perubahan masa}}$

  Kadar perubahan laju terhadap masa = pecutan
- *OP* ⇨ kecerunan positif ⇨ laju bertambah ⇨ pecutan
- *PQ* ⇨ kecerunan sifar ⇨ tiada perubahan laju ⇨ laju seragam
- *QR* ⇨ kecerunan negatif ⇨ laju berkurangan ⇨ nyahpecutan



(a) Laju objek 1 jam pertama atau 1 jam terakhir
$= \frac{50 - 0}{1 - 0} = 50 \text{ km j}^{-1}$

(b) Objek berada dalam keadaan pegun selama 1 jam (*AB*)



(a) Pecutan 40 saat pertama
$= \frac{30 - 0}{40 - 0} = 0.75 \text{ m s}^{-2}$

(b) Pecutan 50 saat terakhir
$= \frac{0 - 30}{150 - 100} = -0.6 \text{ m s}^{-2}$

(c) Laju seragam selama 1 minit (*AB*)

Laju purata = $\frac{\text{Jumlah jarak}}{\text{Jumlah masa}}$

Refleksi Kendiri

Arahan

1. Isi petak yang disediakan untuk soalan refleksi dengan jawapan yang betul dengan menggunakan huruf besar.
2. Pindahkan huruf mengikut nombor petak ke petak 'Ungkapan Misteri'.
3. Apakah perasaan anda dengan ungkapan misteri tersebut?

(a) $\frac{\text{Perubahan jarak}}{\text{Perubahan masa}} =$ [1] [ ] [ ] [ ]

(b) Bagi graf jarak-masa, kecerunan sifar bermaksud keadaan [ ] [ ] [ ] [ ] [2]

(c) $\frac{\text{Perubahan laju}}{\text{Perubahan [3] [ ] [4] [ ]}}$ = Pecutan

(d) Bagi graf laju-masa, kecerunan negatif bermaksud [ ] [5] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]

(e) Laju seragam suatu gerakan berlaku apabila nilai [6] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] adalah sifar bagi graf laju-masa.

(f) [ ] [7] [ ] [ ] purata = $\frac{\text{Jumlah jarak}}{\text{Jumlah masa}}$

Ungkapan Misteri

[4] [7] [5] [7] [7] [2] [7] [6] [3] [7] [1] [7] [5] [4] I [7]

Eksplorasi Matematik

1. Bahagikan kelas kepada beberapa kumpulan yang sesuai.
2. Setiap kumpulan dikehendaki mendapatkan maklumat berkaitan dengan kenderaan berkelajuan tinggi yang bergerak di atas permukaan bumi, ruang udara dan juga angkasa lepas daripada pelbagai sumber.
3. Maklumat yang diperoleh perlu meliputi sejarah ciptaan, kegunaan dan juga kesan sampingan.
4. Pamerkan dapatan kumpulan anda di Sudut Matematik agar murid-murid lain mendapat manfaat daripada tugasan anda.

Sukatan Serakan Data Tak Terkumpul

Anda akan mempelajari

- Serakan
- Sukatan Serakan

Temasya Sukan SEA ke-29 Kuala Lumpur secara rasminya berlangsung dari 19 Ogos hingga 30 Ogos 2017. Sebanyak lebih kurang 4 646 orang atlet telah mengambil bahagian dalam 404 acara. Dalam temasya sukan ini, Malaysia telah menjadi juara keseluruhan dengan 145 buah pingat emas.

Tahukah anda bilangan pingat yang diperoleh atlet Malaysia mengikut acara yang dipertandingkan?

Maslahat Bab

Statistik membantu manusia untuk membuat kajian secara efektif, membina kemahiran berfikir secara kritis dan analitis, serta memudahkan seseorang membuat keputusan yang tepat dengan berpandukan data. Sehubungan dengan itu, penguasaan ilmu statistik membolehkan kita untuk melakukan penambahbaikan secara berfokus serta membuat ramalan atau andaian secara berasas. Kemahiran ini sudah tentu amat penting dalam dunia kerjaya dan kehidupan seharian.

	EMAS	PERAK	GANGSA	JUMLAH
AYSIA	145	92	86	323
LAND	72	86	88	246
NAM	58	50	60	168
APURA	57	58	73	188
ONESIA	38			
NA	24			
NMAR	7			
BOJA	3			
S				
IEI				

JARINGAN KATA

• data tak terkumpul	• *ungrouped data*
• julat antara kuartil	• *interquartile range*
• julat	• *range*
• pencilan	• *outlier*
• plot batang-dan-daun	• *stem and leaf plot*
• plot kotak	• *box plot*
• plot titik	• *dot plot*
• sisihan piawai	• *standard deviation*
• sukatan serakan	• *measure of dispersion*
• varians	• *variance*

Imbasan Silam

Sir Ronald Fisher Aylmer
(1890 -1962)

Sir Ronald Fisher Aylmer memberikan sumbangan penting dalam bidang statistik, termasuk analisis varians. Beliau juga digelar "seorang genius yang mencipta dasar bagi ilmu statistik moden".

http://yakin-pelajar.com/Fisher/8.pdf

8.1 Serakan

Apakah maksud serakan?

Standard Pembelajaran
Menerangkan maksud serakan.

Sukatan serakan merupakan suatu sukatan yang penting dalam statistik. Sukatan serakan memberi kita gambaran tentang cara nilai-nilai dalam satu set data ditaburkan.

Serakan adalah kecil jika set data itu mempunyai julat yang kecil dan sebaliknya.

Sukatan serakan suatu data ialah sukatan kuantitatif seperti julat, julat antara kuartil, varians dan sisihan piawai.

Rangsangan Minda 1

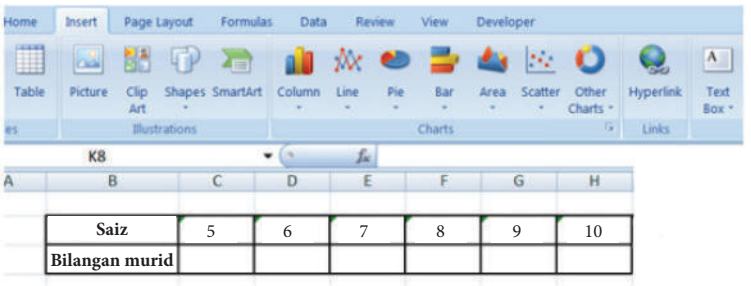
Tujuan: Menerangkan maksud serakan.

Langkah:

1. Bahagikan murid kepada beberapa kumpulan yang sesuai.
2. Dengan kaedah temu bual, dapatkan maklumat berkenaan saiz kasut yang dipakai oleh kawan-kawan di sekolah anda. Dapatkan sekurang-kurangnya 20 data.
3. Dengan menggunakan hamparan elektronik, bina satu jadual bagi maklumat yang diperoleh.

Saiz kasut	5	6	7	8	9	10
Bilangan murid						

4. Lengkapkan jadual kekerapan dalam hamparan elektronik.



MEMORI SAYA

Untuk mewakilkan data secara beretika dan mengelakkan kekeliruan

- Skala yang digunakan dalam perwakilan mesti seragam dan bermula daripada 0.
- Data yang dipaparkan mesti tepat.

5. Dengan menggunakan hamparan elektronik yang sama atau secara manual, bina carta berikut.
   (a) plot titik (*scatter plot*) (edit hasil paparan anda jika perlu)
   (b) plot batang-dan-daun
6. Cetak dan pamerkan hasil kumpulan anda di Sudut Matematik.

7. Melalui aktiviti Galeri Jelajah Minda (*Gallery Walk*), dapatkan maklumat daripada kumpulan lain dan lengkapkan jadual di bawah.

Kumpulan	1	2	3	4	5	6	7
Saiz terbesar							
Saiz terkecil							
Beza saiz							

Perbincangan:

Berdasarkan jadual kekerapan kumpulan anda pada langkah 7,

(a) nyatakan sama ada beza saiz kasut setiap kumpulan sama atau tidak.

(b) bincangkan faktor-faktor yang menyebabkan perbezaan dalam saiz kasut ini.

Hasil daripada Rangsangan Minda 1, didapati bahawa

Taburan data adalah berbeza. Bagi melihat serakan bagi suatu taburan data, beza antara nilai cerapan terbesar dengan nilai cerapan terkecil diambil kira. Sekiranya beza antara nilai tersebut adalah besar, maka keadaan itu menunjukkan bahawa data diserak lebih luas. Begitu jugalah keadaan yang sebaliknya.

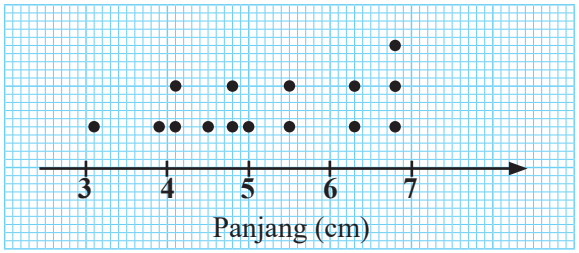
Contoh 1

(a) Jadual menunjukkan jisim, dalam kg, bagi 20 orang murid.

52	60	62	47	55	48	70	67	71	66
48	50	64	51	66	79	62	65	78	72

Nyatakan beza jisim, dalam kg, bagi murid-murid ini.

(b) Rajah menunjukkan plot titik bagi panjang, dalam cm, sampel beberapa jenis serangga.



ZON INFORMASI

Cerapan merupakan data atau dapatan yang diperoleh daripada sesuatu pemerhatian.

Nyatakan beza saiz, dalam cm, bagi sampel serangga terpanjang dan sampel serangga terpendek.

Penyelesaian:

(a) Jisim terbesar = 79 kg

Jisim terkecil = 47 kg

Beza jisim = 79 kg – 47 kg

= 32 kg

(b) Panjang serangga terpanjang = 6.8 cm

Panjang serangga terpendek = 3.1 cm

Beza saiz = 6.8 cm – 3.1 cm

= 3.7 cm

Praktis Kendiri 8.1a

1. Suatu kajian tentang takat didih, dalam °C bagi 10 jenis bahan kimia telah dijalankan. Hasil kajian dicatatkan seperti di bawah.

112	60	75	81	150	92	108	90	45	132

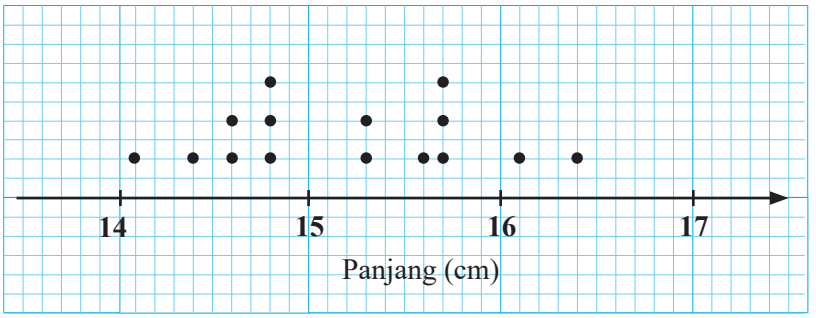
(a) Tentukan suhu terendah dan suhu tertinggi.
(b) Tentukan beza antara suhu tertinggi dengan suhu terendah.

2. Tempoh masa penggunaan media sosial, dalam minit, bagi 12 orang remaja pada suatu hari tertentu dicatatkan seperti yang berikut.

100	120	80	60	90	30	40	100	60	90	120	60

Didapati bahawa masa penggunaan media sosial boleh ditulis dalam bentuk $p \leqslant$ masa $\leqslant q$. Nyatakan nilai p dan q.

3. Rajah menunjukkan plot titik bagi kepanjangan, dalam cm, beberapa jenis sampel daun.



Apakah beza panjang antara sampel daun terpanjang dengan sampel daun terpendek?

Bagaimanakah anda membandingkan dan mentafsir serakan dua atau lebih set data berdasarkan plot batang-dan-daun dan plot titik?

Standard Pembelajaran

Membandingkan dan mentafsir serakan dua atau lebih set data berdasarkan plot batang-dan-daun dan plot titik dan seterusnya membuat kesimpulan.

Plot batang-dan-daun merupakan satu cara untuk menunjukkan taburan suatu set data. Melalui plot batang-dan-daun, kita dapat melihat sama ada data adalah cenderung kepada satu nilai atau nilai manakah paling kerap muncul atau data manakah yang paling kurang muncul.

Apakah langkah-langkah untuk memplot batang-dan-daun?

Rajah di bawah menunjukkan markah yang diperoleh sekumpulan 36 orang murid dalam suatu ujian Prinsip Perakaunan.

27	34	37	39	42	43	46	48	52
29	35	37	40	42	44	47	49	52
31	35	38	40	42	44	47	49	53
32	36	38	41	42	45	47	52	54

Jika data ini tidak disusun dalam bentuk jadual, maka kita tidak dapat melihat serakannya dengan serta-merta. Kita tetapkan nilai puluh sebagai batang dan nilai sa sebagai daun untuk memplot batang-dan-daun bagi data yang diberikan.

Batang	Daun
2	7 9
3	1 2 4 5 5 6 7 7 8 8 9
4	0 0 1 2 2 2 2 3 4 4 5 6 7 7 7 8 9 9
5	2 2 2 3 4

kekunci 2 | 7 bermaksud 27

ZON INFORMASI

Digit daun disusun dari nilai terkecil ke nilai terbesar.

Daripada jadual batang-dan-daun ini, kita perhatikan bahawa markah paling kerap muncul adalah dalam julat 40 hingga 49.

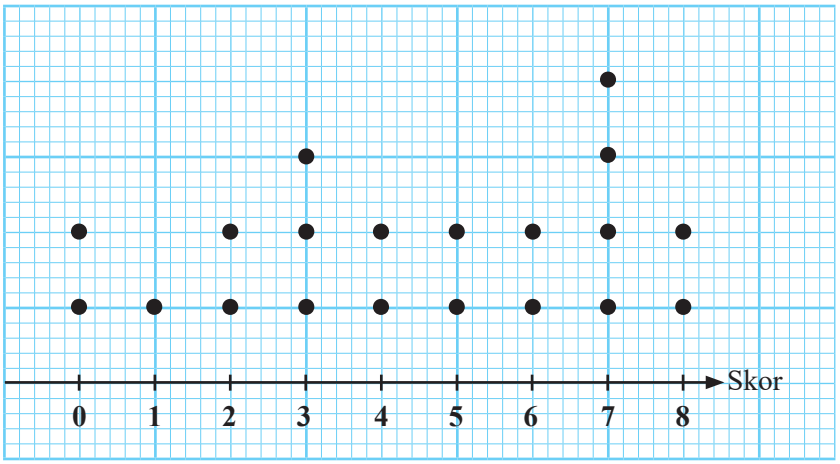
Apakah yang anda faham tentang plot titik?

Plot titik ialah carta statistik yang mengandungi titik-titik yang diplot dengan menggunakan skala seragam. Setiap titik mewakili satu cerapan.

Data berikut menunjukkan skor yang diperoleh oleh sekumpulan 20 orang murid dalam kuiz Biologi.

0	6	4	7	6
2	0	1	7	7
4	5	2	3	8
7	8	3	5	3

Rajah di bawah menunjukkan plot titik untuk data di atas. Setiap titik mewakili satu cerapan.



ZON INFORMASI

Plot titik sesuai digunakan jika bilangan cerapan adalah tidak banyak.

Dalam plot titik di atas, cerapan paling tinggi ialah 8, cerapan paling rendah ialah 0, dan paling banyak murid memperoleh skor 7.

Bagaimanakah anda membandingkan dan mentafsir serakan dua set data berdasarkan plot batang-dan-daun?

Rangsangan Minda 2

Tujuan: Membandingkan dan mentafsir serakan dua set data berdasarkan plot batang-dan-daun.

Langkah:

1. Bahagikan murid kepada beberapa kumpulan yang sesuai.
2. Data berikut menunjukkan markah ujian Sejarah bagi kelas 4 Budi dalam ujian bulanan April dan Mei.

Markah ujian bulan April				
32	41	44	51	58
35	42	46	53	58
35	43	48	54	58
39	43	48	54	60
41	44	49	56	61

Markah ujian bulan Mei				
34	46	55	63	69
38	46	55	65	71
40	49	55	66	73
40	52	59	68	75
43	53	59	68	77

3. Lengkapkan plot batang-dan-daun di bawah.

Markah ujian bulan April		Markah ujian bulan Mei
9 5 5 2	3	4 8
	4	
	5	
	6	
	7	

Perbincangan:

Berdasarkan plot batang-dan-daun di atas, ujian manakah yang menunjukkan pencapaian yang lebih baik? Berikan justifikasi anda.

Hasil daripada Rangsangan Minda 2, didapati bahawa;

Pencapaian ujian bulan Mei adalah lebih baik kerana ramai murid mendapat markah tinggi dalam ujian tersebut berbanding dengan ujian bulan April.

Secara generalisasi,

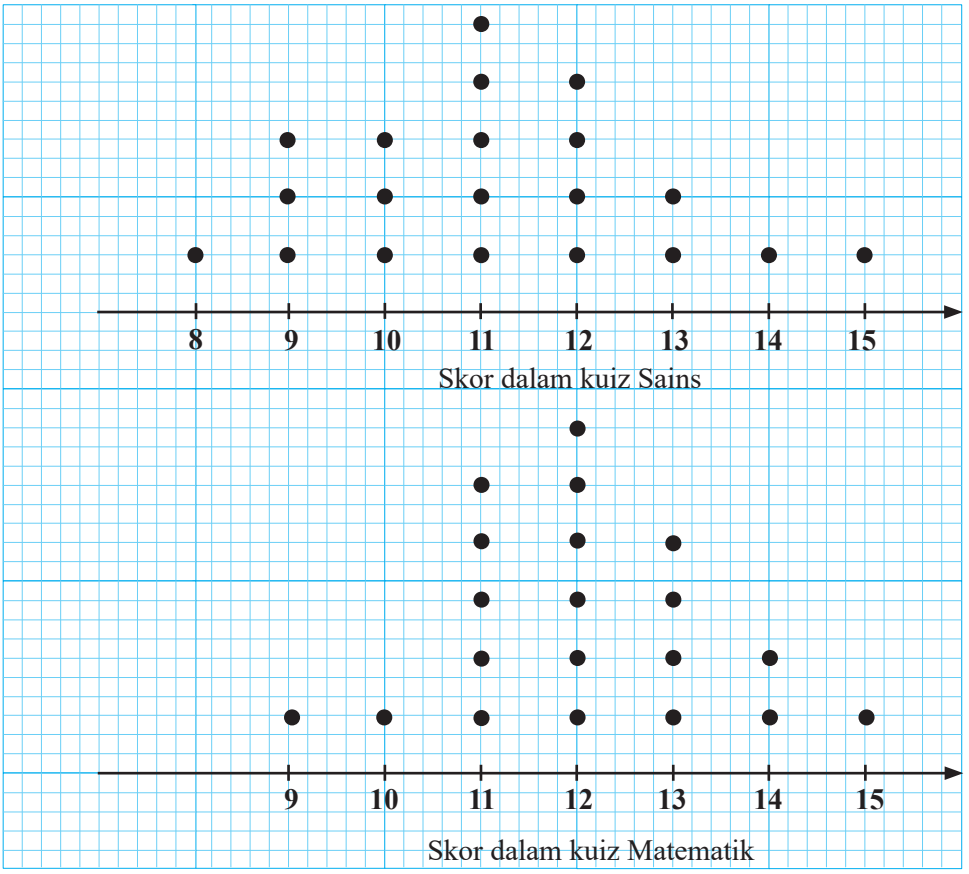
Apabila dua set data diplot dengan menggunakan plot batang-dan-daun, kita boleh, membandingkan corak kedua-dua plot berkenaan.

Bagaimanakah anda membandingkan dan mentafsir dua set data berdasarkan plot titik?

Melalui plot titik, kita boleh membandingkan dan mentafsir bentuk, serakan titik, kekerapan serta cerapan yang tertumpu di kiri atau di kanan bagi dua set data.

Contoh 2

Satu pertandingan kuiz Matematik dan kuiz Sains telah dijalankan di SMK Bestari bersempena dengan Minggu Sains dan Matematik. 20 orang murid telah mengambil bahagian dalam kuiz tersebut. Rajah di bawah menunjukkan dua set plot titik bagi skor yang diperoleh murid-murid ini.



(a) Data manakah yang menunjukkan serakan yang lebih besar? Berikan justifikasi anda.
(b) Kuiz yang manakah mempunyai beza cerapan yang lebih tinggi?
(c) Antara skor kuiz Sains dan skor kuiz Matematik, pencapaian yang manakah lebih baik?

Penyelesaian:

(a) Serakan skor dalam kuiz Sains adalah lebih besar, kerana beza cerapan data adalah lebih besar.
(b) Kuiz Sains mempunyai beza cerapan yang lebih tinggi, iaitu 7.
(c) Skor kuiz Matematik lebih baik kerana kebanyakan cerapan tertumpu pada bahagian kanan plot titik.

Praktis Kendiri 8.1b

1. Data di bawah menunjukkan jisim, dalam kg, bagi dua kumpulan murid.

Kumpulan A

58	47	68	63	61
60	54	70	63	45
69	54	52	41	82
70	53	70	60	52
81	67	56	50	76
86	66	62	73	75
44	46	62	72	49
84	76	82	68	64

Kumpulan B

72	54	76	49	64
58	76	40	64	65
58	69	48	52	42
40	70	66	57	83
41	70	69	56	61
78	52	75	63	84
46	82	55	59	57
83	42	56	60	59

Lukis plot batang-dan-daun untuk mempamerkan taburan jisim bagi dua kumpulan murid tersebut. Berikan komen anda berkenaan taburan jisim dua kumpulan murid ini.

2. Data di bawah menunjukkan markah Geografi yang diperoleh sekumpulan 25 orang murid dalam dua ujian bulanan.

Ujian bulan April

35	56	42	56	48
65	51	58	42	60
46	61	46	48	62
54	50	41	50	55
50	69	57	51	50

Ujian bulan Mei

63	42	47	52	52
48	45	51	41	50
55	48	61	42	49
39	63	54	56	54
46	50	51	57	53

Lukis dua plot titik dengan menggunakan skala yang sama untuk melihat perbezaan taburan markah bagi dua ujian berkenaan. Berikan komen anda berkenaan dengan pencapaian kumpulan murid bagi dua ujian ini.

3. Data di bawah menunjukkan saiz kasut yang dipakai oleh 20 orang murid dalam dua kelas yang berbeza.

Kelas Mawar

8.0	8.0	12.5	7.5	8.0
6.5	6.0	8.0	11.0	8.5
7.0	7.5	10.5	8.0	7.0
8.0	10.5	7.5	6.5	6.5

Kelas Teratai

8.5	9.0	9.5	10.5	9.0
9.5	11.0	9.0	9.5	9.5
10.5	9.5	8.5	9.0	9.0
9.0	9.0	10.5	9.5	11.0

(a) Bina dua plot titik dengan menggunakan skala yang sama.

(b) Bandingkan kedua-dua plot titik yang diperoleh daripada (a). Kelas manakah yang mempunyai beza saiz kasut yang lebih besar? Berikan justifikasi anda.

8.2 Sukatan Serakan

Bagaimanakah anda menentukan julat, julat antara kuartil, varians dan sisihan piawai sebagai sukatan untuk menghuraikan serakan bagi data tak terkumpul?

Standard Pembelajaran

Menentukan julat, julat antara kuartil, varians dan sisihan piawai sebagai sukatan untuk menghuraikan serakan bagi data tak terkumpul.

Dalam statistik, julat bagi suatu set data tak terkumpul ialah beza antara nilai cerapan terbesar dengan nilai cerapan terkecil. Sukatan ini memberi kita satu gambaran bagaimana data ditaburkan. Sebagai contoh, dalam ujian Bahasa Melayu, suatu kelas yang mempunyai julat markah yang lebih besar bermaksud kebolehan murid dalam kelas berkenaan adalah sangat berbeza.

Julat = nilai cerapan terbesar – nilai cerapan terkecil

Contoh 3

Diberi set data 34, 23, 14, 26, 40, 25, 20, tentukan julat bagi set data ini.

Penyelesaian:

34, 23, 14, 26, 40, 25, 20

Cerapan terkecil: 14 — Cerapan terbesar: 40

Julat = 40 – 14
= 26

Bagaimanakah anda menentukan julat daripada jadual kekerapan?

Contoh 4

Jadual berikut menunjukkan skor bagi sekumpulan murid dalam suatu kuiz Kimia.

Skor	2	3	4	5	6	7	8
Bilangan murid	3	5	6	8	12	7	3

Tentukan julat bagi data di atas.

Penyelesaian:

Cerapan terkecil: 2 — Cerapan terbesar: 8

Skor	2	3	4	5	6	7	8
Bilangan murid	3	5	6	8	12	7	3

Julat = 8 – 2
= 6

Bagaimanakah anda menentukan julat antara kuartil bagi suatu set data tak terkumpul?

Apabila nilai-nilai sesuatu data disusun mengikut tertib menaik, kuartil pertama, Q_1 ialah nilai data yang berada pada kedudukan $\frac{1}{4}$ yang pertama manakala kuartil ketiga, Q_3 ialah nilai data yang berada pada kedudukan $\frac{3}{4}$ daripada keseluruhan susunan data tersebut.

Gunakan langkah-langkah berikut untuk menentukan Q_1 dan Q_3 daripada satu set data tak terkumpul.

1. Susun data mengikut tertib menaik.
2. Tentukan median data tersebut.
3. Bahagikan set data kepada dua bahagian, iaitu bahagian data sebelum median dan bahagian data selepas median.
4. Q_1 ialah data yang berada di kedudukan tengah-tengah bahagian data sebelum median.
5. Q_3 ialah data yang berada di kedudukan tengah-tengah bahagian data selepas median.
6. Jika bilangan data ganjil, median, Q_1 dan Q_3 dapat terus dikenal pasti daripada susunan data.
7. Jika bilangan data genap, nilai median, Q_1 dan Q_3 dapat diperoleh dengan mencari nilai purata antara dua data pada kedudukan tengah-tengah bahagian data sebelum atau selepas median.
8. Julat antara kuartil = $Q_3 - Q_1$

Contoh 5

Tentukan julat antara kuartil bagi setiap set data berikut:

(a) 4, 4, 6, 8, 10, 13, 15, 16, 20, 22, 23

(b) 11, 14, 14, 17, 19, 20, 20, 21, 22

(c) 2.3, 2.5, 2.5, 2.6, 2.8, 2.9, 3.0, 3.2

Penyelesaian:

(a) 4 4 | 6 | 8 10 | 13 | 15 16 | 20 | 22 23

2 cerapan, 2 cerapan, 2 cerapan, 2 cerapan

Q_1 = 6, median = 13, Q_3 = 20

Julat antara kuartil = 20 – 6
= 14

Tentukan kedudukan median terlebih dahulu

(b) 11 14 | 14 17 | 19 | 20 20 | 21 22

2 cerapan, 2 cerapan, 2 cerapan, 2 cerapan

$Q_1 = \frac{14 + 14}{2}$, median = 19, $Q_3 = \frac{20 + 21}{2}$

Julat antara kuartil $= \frac{20 + 21}{2} - \frac{14 + 14}{2}$
$= 6.5$

(c) 2.3 2.5 | 2.5 2.6 | 2.8 2.9 | 3.0 3.2

2 cerapan, 2 cerapan, 2 cerapan, 2 cerapan

$Q_1 = \frac{2.5 + 2.5}{2}$, median = $\frac{2.6 + 2.8}{2}$, $Q_3 = \frac{2.9 + 3.0}{2}$

Julat antara kuartil $= \frac{2.9 + 3.0}{2} - \frac{2.5 + 2.5}{2}$
$= 0.45$

ZON INTERAKTIF

Data juga boleh disusun dalam tertib menurun. Bagaimanakah kuartil pertama dan kuartil ketiga dapat diperoleh dalam kes ini? Bincangkan.

MEMORI SAYA

Median ialah cerapan yang berada di tengah apabila data disusun dalam tertib menaik atau menurun.

ZON INFORMASI

Kuartil kedua, Q_2 juga merupakan median.

ZON INFORMASI

Kuartil pertama, Q_1 juga dikenali sebagai kuartil bawah manakala kuartil ketiga, Q_3 digelar sebagai kuartil atas.

Contoh 6

Tentukan julat antara kuartil bagi jadual kekerapan berikut.

Skor	2	3	4	5	6	7	8
Bilangan murid	3	5	6	8	12	7	3

Penyelesaian:

Skor cerapan ke-11 | Skor cerapan ke-33

Skor	2	3	4	5	6	7	8
Bilangan murid	3	+ 5	+ 6	+ 8	+ 12	+ 7	+ 3
Kekerapan Longgokan	3	8	14	22	34	41	44
	$C_1 - C_3$	$C_4 - C_8$	$C_9 - C_{14}$	$C_{15} - C_{22}$	$C_{23} - C_{34}$	$C_{35} - C_{41}$	$C_{42} - C_{44}$

C_{11} C_{33}

Q_1 = cerapan ke-$\left(\frac{1}{4} \times 44\right)$
= cerapan ke-11
= 4 ← C_{11}

Q_3 = cerapan ke-$\left(\frac{3}{4} \times 44\right)$
= cerapan ke-33
= 6 ← C_{33}

Julat antara kuartil = 6 – 4
= 2

ZON INFORMASI

Kekerapan longgokan bagi suatu data ditentukan dengan menambahkan kekerapannya dan semua kekerapan data sebelumnya.

Apakah yang anda faham tentang varians dan sisihan piawai?

Varians dan sisihan piawai ialah sukatan serakan yang sering digunakan dalam statistik. Varians ialah purata kuasa dua bagi beza data dengan min.

Sisihan piawai ialah punca kuasa dua varians dan mengukur serakan data pada min, yang diukur dengan unit yang sama dengan data.

Bagaimanakah anda dapat menentukan varians dan sisihan piawai bagi data tak terkumpul?

Varians bagi suatu set data tak terkumpul boleh diperoleh dengan menggunakan rumus varians,

$\sigma^2 = \frac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{N}$ atau $\sigma^2 = \frac{\Sigma x^2}{N} - \bar{x}^2$

Sisihan piawai, $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{N}}$ atau $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N} - \bar{x}^2}$

MEMORI SAYA

$\bar{x}$ = min data

$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{N}$

Contoh 7

Tentukan varians bagi set data 2, 4, 5, 5, 6.

Penyelesaian:

min, $\bar{x} = \frac{2 + 4 + 5 + 5 + 6}{5}$
$= 4.4$

$$\text{varians, } \sigma^2 = \frac{(2-4.4)^2 + (4-4.4)^2 + (5-4.4)^2 + (5-4.4)^2 + (6-4.4)^2}{5}$$
$$= 1.84$$

Kaedah Alternatif

$$\sigma^2 = \frac{2^2 + 4^2 + 5^2 + 5^2 + 6^2}{5} - 4.4^2$$
$$= 1.84$$

Contoh 8

Tentukan sisihan piawai bagi set data 5, 7, 8, 8, 10, 13, 15, 16, 16, 20.

ZON INFORMASI

σ^2 = varians
σ = sisihan piawai

Penyelesaian:

$$\text{min, } \bar{x} = \frac{5+7+8+8+10+13+15+16+16+20}{10}$$
$$= 11.8$$
$$\text{varians, } \sigma^2 = \frac{5^2 + 7^2 + 8^2 + 8^2 + 10^2 + 13^2 + 15^2 + 16^2 + 16^2 + 20^2}{10} - 11.8^2$$
$$= 21.56$$
$$\text{Sisihan piawai, } \sigma = \sqrt{21.56}$$
$$= 4.643$$

Contoh 9

Jadual di bawah menunjukkan bilangan buku yang dibaca oleh sekumpulan murid dalam satu bulan tertentu. Hitung varians dan sisihan piawai bagi bilangan buku yang dibaca.

Bilangan buku	0	1	2	3	4
Bilangan murid	3	5	8	2	2

Penyelesaian:

$$\text{min, } \bar{x} = \frac{3(0) + 5(1) + 8(2) + 2(3) + 2(4)}{3+5+8+2+2}$$
$$= 1.75$$

$$\text{varians, } \sigma^2 = \frac{3(0-1.75)^2 + 5(1-1.75)^2 + 8(2-1.75)^2 + 2(3-1.75)^2 + 2(4-1.75)^2}{20}$$
$$= 1.2875$$

ZON INFORMASI

Jika data tak terkumpul diberi dalam jadual kekerapan maka

$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$ dan

$\sigma^2 = \frac{\Sigma f(x-\bar{x})^2}{\Sigma f}$ atau

$\sigma^2 = \frac{\Sigma fx^2}{\Sigma f} - \bar{x}^2$

Kaedah Alternatif 1

$$\sigma^2 = \frac{3(0)^2 + 5(1)^2 + 8(2)^2 + 2(3)^2 + 2(4)^2}{20} - 1.75^2$$
$$= 1.2875$$

Kaedah Alternatif 2

x	f	fx	x^2	fx^2
0	3	0	0	0
1	5	5	1	5
2	8	16	4	32
3	2	6	9	18
4	2	8	16	32
	$\sum f = 20$	$\sum fx = 35$		$\sum fx^2 = 87$

Min, $\bar{x} = \frac{35}{20}$

$= 1.75$

Varians, $\sigma^2 = \frac{87}{20} - 1.75^2$

$= 1.2875$

Sisihan piawai, $\sigma = \sqrt{1.2875}$

$= 1.1347$

Semak Jawapan

1. Tekan kekunci mode 2 kali
   Paparan SD REG BASE 1 2 3
2. Tekan 1 untuk memilih SD
3. Masukkan data
   Tekan 0, diikuti M+ 3 kali
   Tekan 1, diikuti M+ 5 kali
   Tekan 2, diikuti M+ 8 kali
   Tekan 3, diikuti M+ 2 kali
   Tekan 4, diikuti M+ 2 kali
   Paparan n= 20
4. Tekan shift 2
   Paparan $\bar{x}$ $x\sigma n$ $x\sigma n-1$ 1 2 3
5. Tekan 2, kemudian =
   Paparan 1.1347
6. Tekan butang x^2, kemudian =
   Paparan 1.2875

Praktis Kendiri 8.2a

1. Tentukan julat dan julat antara kuartil bagi setiap set data berikut.

(a) 3, 7, 5, 9, 4, 4, 8, 7, 6, 2, 5.

(b) 13, 15, 19, 22, 17, 14, 15, 16, 18, 19, 11, 10, 20.

(c) 2.3, 2.2, 3.1, 2.8, 2.7, 2.4, 2.5, 2.3.

2. Tentukan julat dan julat antara kuartil bagi setiap set data berikut.

(a)

Wang saku (RM)	4	5	6	7	8	9
Bilangan murid	5	10	7	6	3	1

(b)

Skor	10	11	12	13	14	15
Bilangan murid	3	10	13	4	8	6

3. Bagi setiap set data berikut, tentukan varians dan sisihan piawai.

(a) 5, 7, 6, 9, 12, 10, 10, 13

(b) 32, 40, 35, 39, 44, 48, 42

4. Jadual berikut menunjukkan bilangan gol yang diperoleh oleh 20 orang pemain bola sepak dalam suatu pertandingan. Tentukan varians dan sisihan piawai bagi taburan ini.

Bilangan Gol	0	1	2	3	4
Bilangan pemain	3	5	6	5	1

Apakah kelebihan dan kekurangan pelbagai sukatan serakan?

Standard Pembelajaran

Menerangkan kelebihan dan kekurangan pelbagai sukatan serakan untuk menghuraikan data tak terkumpul.

Sukatan serakan mengukur taburan sesuatu set data. Julat ialah sukatan serakan yang paling mudah dihitung. Namun, julat tidak dapat memberikan satu gambaran yang baik tentang cara data ditaburkan.

Bagi kes yang wujudnya pencilan atau nilai ekstrem, julat antara kuartil adalah satu sukatan serakan yang lebih sesuai untuk menunjukkan taburan data berkenaan.

Sisihan piawai biasanya digunakan untuk membanding dua set data. Secara umumnya, sisihan piawai yang kecil menunjukkan data adalah terserak berhampiran dengan min manakala sisihan piawai yang besar menunjukkan data adalah terserak jauh daripada min.

Contoh 10

Hitung julat dan julat antara kuartil bagi set data 10, 11, 11, 14, 18, 20, 21, 21, 25 dan 40.
Tentukan sukatan serakan yang lebih sesuai digunakan, untuk mengukur taburan set data di atas.

Penyelesaian:

Julat = 40 – 10
= 30

Julat antara kuartil = 21 – 11
= 10

Julat antara kuartil ialah sukatan serakan yang lebih sesuai kerana wujudnya pencilan, 40.

Contoh 11

Jadual di bawah menunjukkan pencapaian dua orang murid dalam 5 ujian Fizik.

	Ujian 1	Ujian 2	Ujian 3	Ujian 4	Ujian 5
Aiman	40	70	90	85	64
John	80	65	73	58	73

Salah seorang murid akan dipilih untuk mewakili sekolah dalam satu pertandingan kuiz Fizik. Tentukan siapakah yang layak dipilih dan berikan justifikasi anda.

Penyelesaian:

Aiman

$$\text{Min markah} = \frac{40 + 70 + 90 + 85 + 64}{5} = 69.8$$

$$\text{Sisihan piawai, } \sigma = \sqrt{\frac{40^2 + 70^2 + 90^2 + 85^2 + 64^2}{5} - 69.8^2}$$
$$= 17.67$$

John

$$\text{Min markah} = \frac{80 + 65 + 73 + 58 + 73}{5} = 69.8$$

Sisihan piawai, $\sigma = \sqrt{\dfrac{80^2 + 65^2 + 73^2 + 58^2 + 73^2}{5} - 69.8^2}$

$= 7.574$

John akan dipilih untuk menyertai kuiz Fizik. Sisihan piawai markah bagi John adalah lebih rendah kerana pencapaian John adalah lebih konsisten.

Semak Jawapan

1. Tekan kekunci mode 2 kali.
   Paparan SD REG BASE 1 2 3
2. Tekan 1 untuk memilih SD
3. Masukkan data
   Tekan 80, diikuti M+
   paparan $n = 1$
   Tekan 65, diikuti M+
   paparan $n = 2$
   Tekan 73, diikuti M+
   paparan $n = 3$
   Tekan 58, diikuti M+
   paparan $n = 4$
   Tekan 73, diikuti M+
   paparan $n = 5$
4. Tekan shift 2
   Paparan $\bar{x}$ 1 $x\sigma n$ 2 $x\sigma n-1$ 3
5. Tekan 2
6. Tekan =
   Paparan 7.574

Praktis Kendiri 8.2b

1. Hitung julat dan julat antara kuartil bagi set data 2, 16, 16, 19, 20, 20, 24, 26, 27, 27, 29. Tentukan sukatan serakan yang lebih sesuai digunakan untuk mengukur taburan set data di atas. Berikan justifikasi anda.

2. Encik Rakesh ingin memilih seorang daripada dua orang murid untuk mewakili sekolah dalam suatu pertandingan kuiz Perniagaan peringkat kebangsaan. Encik Rakesh telah memberikan 5 ujian kepada dua orang murid. Yang berikut merupakan keputusan 5 ujian berkenaan.

	Ujian 1	Ujian 2	Ujian 3	Ujian 4	Ujian 5
Murid A	32	61	75	82	90
Murid B	50	67	70	73	80

Tentukan sukatan serakan yang sesuai digunakan untuk Encik Rakesh membuat pemilihan. Terangkan bagaimanakah Encik Rakesh boleh membuat pemilihan berdasarkan sukatan serakan yang dihitung.

3. Jadual di bawah menunjukkan gaji bulanan bagi tujuh orang pekerja Syarikat Texan.

Pekerja	1	2	3	4	5	6	7
Gaji(RM)	900	920	950	1 000	1 100	1 230	3 000

(a) Hitung julat, julat antara kuartil dan sisihan piawai bagi gaji bulanan pekerja Syarikat Texan.

(b) Nyatakan sukatan serakan yang paling sesuai digunakan untuk memberikan suatu gambaran yang lebih jelas berkenaan dengan taburan gaji bulanan pekerja di Syarikat Texan.

Bagaimanakah anda membina dan mentafsir plot kotak bagi suatu set data tak terkumpul?

Selain plot batang-dan-daun dan plot titik, plot kotak juga merupakan satu kaedah yang berguna untuk menunjukkan serakan sesuatu set data.

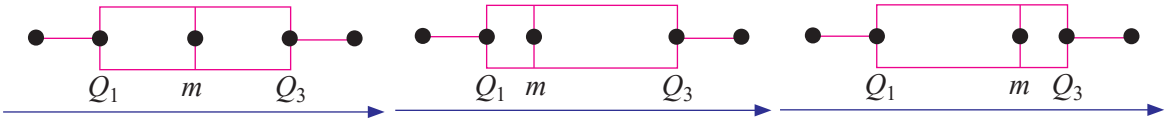
Standard Pembelajaran

Membina dan mentafsir plot kotak bagi suatu set data tak terkumpul.

Apakah itu plot kotak bagi set data tak terkumpul?

Plot kotak ialah satu cara untuk mempamerkan taburan bagi suatu set data berdasarkan lima nilai, iaitu nilai minimum, kuartil pertama, median, kuartil ketiga dan nilai maksimum bagi set data berkenaan. Plot kotak dapat menunjukkan sama ada suatu set data adalah simetri pada median. Plot kotak selalunya digunakan untuk membuat analisis dengan bilangan data yang banyak.

Antara bentuk plot kotak adalah seperti yang berikut.



Bagaimanakah anda membina plot kotak?

Plot kotak akan dibina di atas garis nombor.
Pertimbangkan data di bawah.

Data di bawah menunjukkan markah yang diperoleh oleh 15 orang dalam suatu ujian Bahasa Cina.

35 40 42 45 52 52 53 57 62 62 66 68 73 73 75

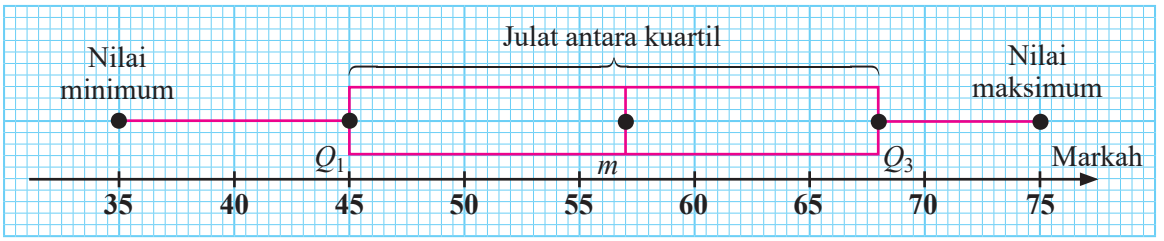
Bagi set data ini, nilai-nilai seperti dalam jadual berikut ditentukan dahulu.

Nilai minimum	35
Kuartil pertama	45
Median	57
Kuartil ketiga	68
Nilai maksimum	75

ZON INFORMASI

Plot kotak juga boleh dibuat secara mencancang.

Maka plot kotak untuk data di atas adalah seperti berikut.

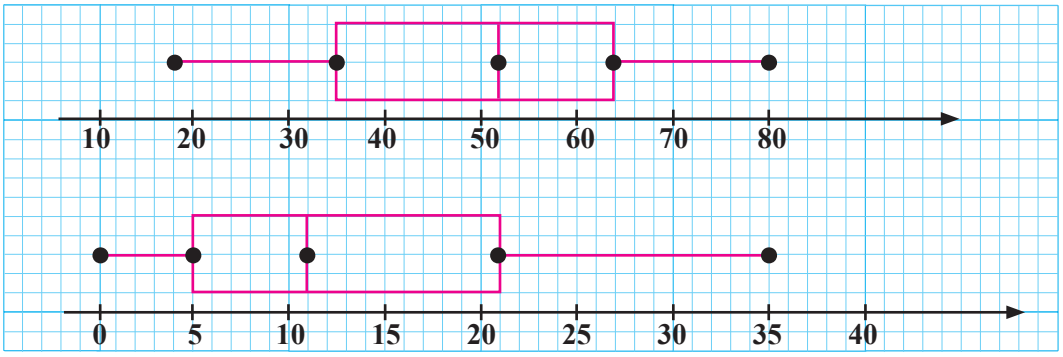


Contoh 12

Diberi dua plot kotak.

(a)

(b)



Bagi setiap plot kotak, nyatakan

(i) median,
(ii) kuartil pertama,
(iii) kuartil ketiga,
(iv) julat antara kuartil,
(v) nilai minimum,
(vi) nilai maksimum,
(vii) julat.

Penyelesaian:

(a) (i) median = 52
(ii) kuartil pertama = 35
(iii) kuartil ketiga = 64
(iv) julat antara kuartil = 29
(v) nilai minimum = 18
(vi) nilai maksimum = 80
(vii) julat = 62

(b) (i) nilai median = 11
(ii) kuartil pertama = 5
(iii) kuartil ketiga = 21
(iv) julat antara kuartil = 16
(v) nilai minimum = 0
(vi) nilai maksimum = 35
(vii) julat = 35

Praktis Kendiri 8.2c

1. Bagi setiap set data berikut, bina satu plot kotak.

(a)

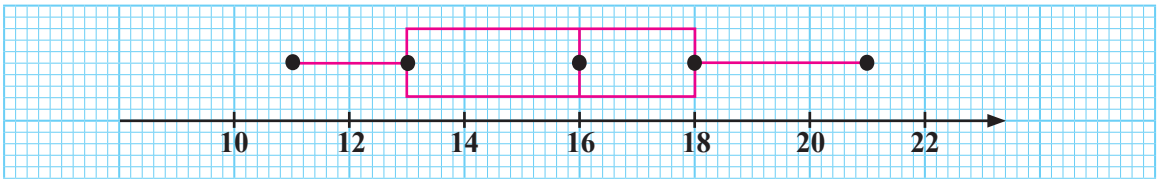
40	43	40	35	44	25
38	46	64	48	40	31
35	35	43	34	30	40

(b)

70	52	43	62	56	66	52
63	51	48	43	56	52	40
65	50	70	55	43	57	70

2. Bagi plot kotak di bawah, nyatakan

(a) nilai minimum
(b) nilai maksimum
(c) kuartil pertama
(d) kuartil ketiga
(e) julat antara kuartil
(f) median



Apakah kesan perubahan data terhadap serakan?

Standard Pembelajaran

Menentukan kesan perubahan data terhadap serakan berdasarkan:
- nilai sukatan serakan
- perwakilan grafik

Perubahan data merangkumi kes-kes seperti di bawah.

(a) Setiap data ditambah atau ditolak dengan suatu pemalar secara seragam

(b) Setiap data didarab atau dibahagikan dengan suatu pemalar secara seragam.

(c) Kewujudan nilai pencilan dalam set data

(d) Suatu nilai dikeluarkan atau dimasukkan dalam set data

Apakah kesan perubahan sukatan serakan apabila setiap data ditukar dengan menambah atau menolak suatu pemalar?

Pertimbangkan kes ini.
Pada mulanya, saya mempunyai set data 5, 8, 3, 4, 1.
Jika setiap cerapan dalam data ini ditambahkan dengan 5, maka data di atas akan menjadi 10, 13, 8, 9, 6. Apakah yang berlaku kepada nilai serakan seperti julat, julat antara kuartil, varians dan sisihan piawai bagi set data baharu?

Rangsangan Minda 3

Tujuan: Mengenal pasti kesan perubahan julat, julat antara kuartil dan sisihan piawai apabila setiap data ditambah atau ditolak dengan suatu pemalar.

Langkah:

1. Bahagikan murid kepada beberapa kumpulan yang sesuai.
2. Setiap kumpulan diberi kad A1, A2 dan A3. (rujuk *QR Code*)
3. Setiap kumpulan dikehendaki melengkapkan maklumat dalam kad berkenaan.

Perbincangan:

Apakah perubahan pada setiap nilai sukatan serakan apabila setiap cerapan ditambah atau ditolak dengan suatu pemalar?

Imbas *QR code* untuk muat turun kad A1, kad A2 dan kad A3.
http://yakin-pelajar.com/BTMatematik/Bab8/RMinda3.pdf

Hasil daripada Rangsangan Minda 3, didapati bahawa;

> Tidak ada perubahan nilai sukatan serakan apabila setiap cerapan dalam suatu set data ditambah atau ditolak dengan suatu pemalar.

Apakah kesan perubahan sukatan serakan apabila setiap nilai dalam suatu set data didarab atau dibahagikan dengan suatu pemalar?

Pertimbangkan kes ini.
Pada mulanya, saya mempunyai set data 5, 8, 3, 4, 1.
Jika setiap cerapan data ini didarab dengan 2, maka data di atas akan menjadi 10, 16, 6, 8, 2. Apakah yang akan berlaku kepada nilai serakan seperti julat, julat antara kuartil, varians dan sisihan piawai bagi set data baharu?

Rangsangan Minda 4

Tujuan: Mengenal pasti kesan perubahan julat, julat antara kuartil dan sisihan piawai apabila setiap cerapan dalam suatu set data didarab atau dibahagikan dengan suatu nombor.

Langkah:

1. Bahagikan murid kepada beberapa kumpulan yang sesuai.
2. Setiap kumpulan diberi kad B1, B2 dan B3.
3. Setiap kumpulan dikehendaki melengkapkan maklumat dalam kad berkenaan.

Perbincangan:

Apakah kesan kepada nilai sukatan serakan apabila setiap cerapan dalam suatu set data didarab dengan 3? Apakah kesan kepada nilai sukatan serakan apabila setiap cerapan dalam suatu set data dibahagikan dengan 2?

Imbas *QR code* untuk muat turun kad B1, kad B2 dan kad B3.
http://yakin-pelajar.com/BTMatematik/Bab8/RMinda4.pdf

Hasil daripada Rangsangan Minda 4, didapati bahawa;

(a) Apabila setiap cerapan dalam suatu set data didarab dengan suatu pemalar k, maka
- (i) julat baharu $= k \times$ julat asal
- (ii) julat antara kuartil baharu $= k \times$ julat antara kuartil asal
- (iii) sisihan piawai baharu $= k \times$ sisihan piawai asal
- (iv) varians baharu $= k^2 \times$ varians asal

(b) Apabila setiap cerapan dalam suatu set data dibahagi dengan suatu pemalar k, maka
- (i) julat baharu $= \dfrac{\text{julat asal}}{k}$
- (ii) julat antara kuartil baharu $= \dfrac{\text{julat antara kuartil asal}}{k}$
- (iii) sisihan piawai baharu $= \dfrac{\text{sisihan piawai asal}}{k}$
- (iv) varians baharu $= \dfrac{\text{varians asal}}{k^2}$

Apakah kesan ke atas sukatan serakan apabila sesuatu pencilan dimasukkan atau dikeluarkan daripada suatu set data?

(a) **Julat**

Julat akan berubah dengan mendadak apabila suatu pencilan dikeluarkan atau dimasukkan ke dalam set data.

(b) **Julat antara kuartil**

Nilai julat antara kuartil kurang dipengaruhi apabila suatu pencilan ditambah atau dikeluarkan daripada suatu set data.

(c) **Varians dan sisihan piawai**

Nilai bagi varians dan sisihan piawai akan bertambah dengan banyak apabila pencilan ditambah ke dalam set data.

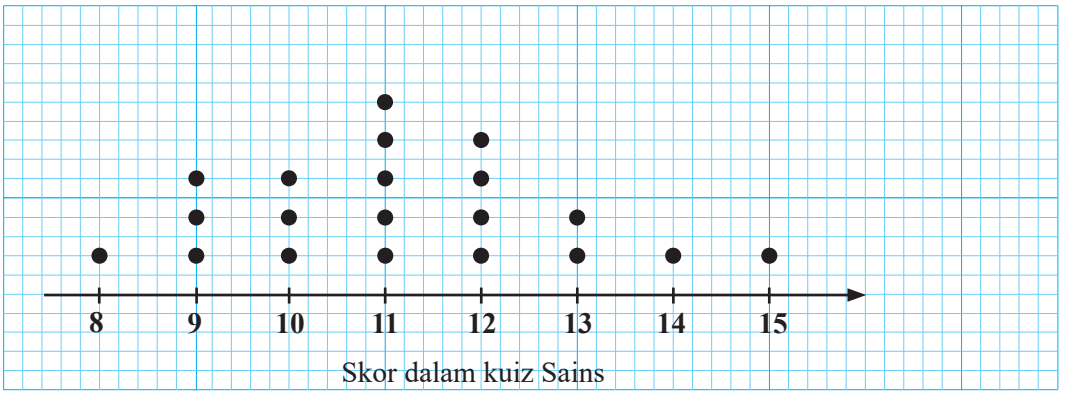
Jika beza antara nilai cerapan baharu dengan nilai min adalah rendah, maka nilai sisihan piawai baharu akan semakin kecil dan sebaliknya.

Jika beza antara nilai cerapan yang dikeluarkan dengan nilai min adalah rendah, maka nilai sisihan piawai baharu akan semakin besar dan sebaliknya.

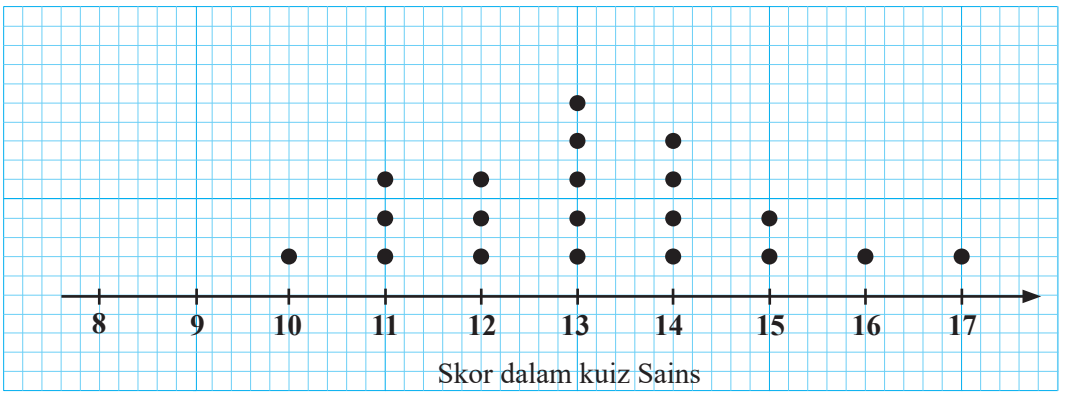
Bagaimanakah anda menentukan kesan perubahan data terhadap serakan berdasarkan perwakilan grafik?

Kesan perubahan data dapat dipaparkan secara grafik dengan menggunakan plot titik, plot batang-dan-daun atau plot kotak.

(a) Data ditukar secara seragam dengan menambah atau menolak suatu pemalar.



Apabila setiap cerapan ditambah 2



Dalam rajah di atas, apabila setiap cerapan ditambah dengan 2, didapati bahawa

(i) seluruh plot titik dianjak ke kanan sebanyak 2 unit dengan serakan tidak berubah.

(ii) Julat skor asal = 15 – 8 = 7

Julat skor baharu = 17 – 10 = 7

Julat bagi kedua-dua set data ini adalah sama.

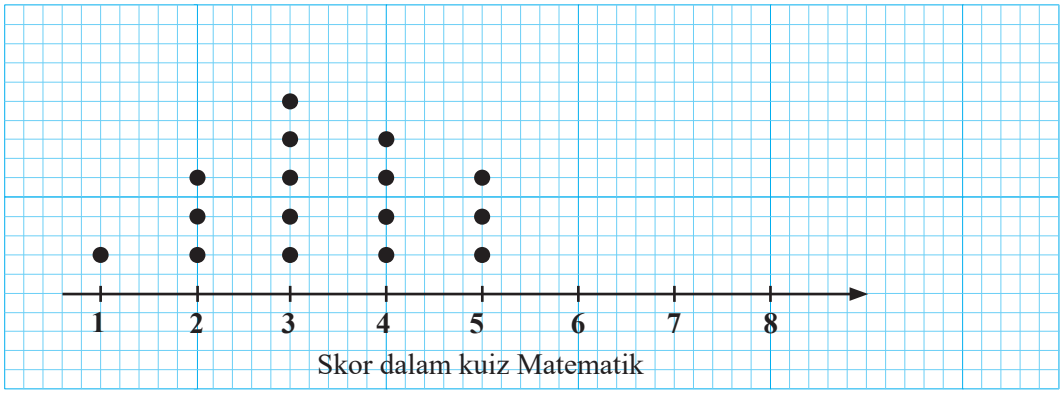
Secara generalisasi,

Apabila setiap cerapan dalam suatu set data ditambah dengan suatu pemalar, nilai sukatan serakan tidak berubah.

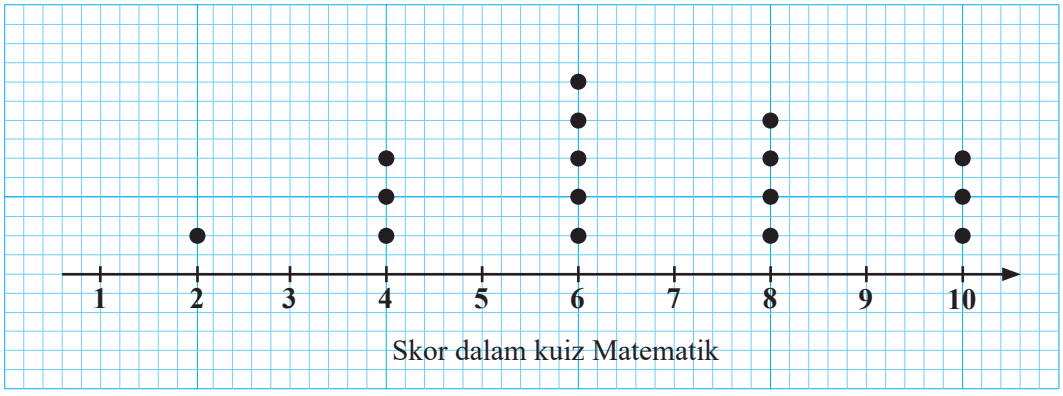
ZON INTERAKTIF

Bincangkan apa yang akan berlaku kepada nilai sukatan serakan yang lain apabila setiap cerapan dalam suatu set data ditolak dengan suatu pemalar.

(b) Data ditukar secara seragam apabila setiap cerapan didarab atau dibahagi dengan suatu pemalar.



Apabila setiap cerapan didarab 2



Dalam rajah di atas, apabila setiap cerapan didarab dengan 2, didapati bahawa;

(i) serakan seluruh plot titik telah berubah menjadi dua kali ganda lebih lebar.

(ii) julat skor asal = 5 – 1 = 4 Julat skor baharu = 10 – 2 = 8

Julat bagi set data baharu menjadi dua kali ganda julat bagi set data asal.
Apabila setiap cerapan dalam suatu set data didarap dengan suatu pemalar, k,

Julat baharu = k × julat asal

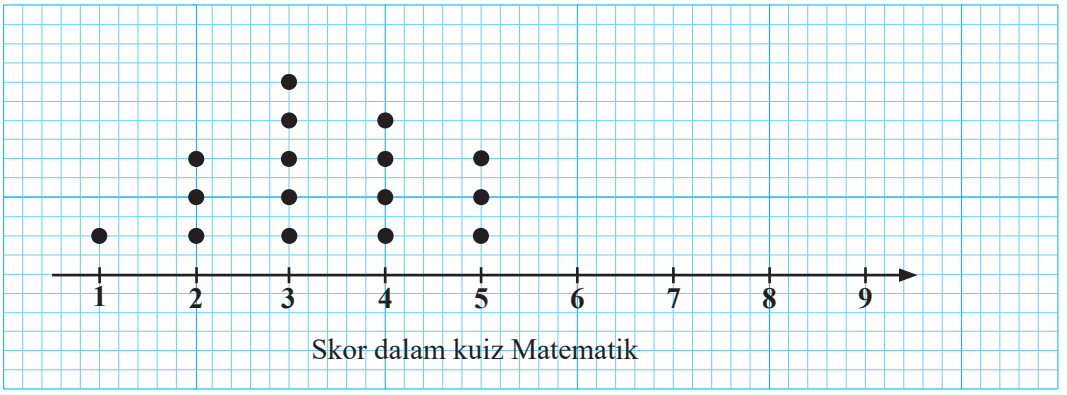
Secara generalisasi,

Apabila setiap cerapan dalam suatu set data didarab dengan suatu pemalar, k, nilai sukatan serakan akan berubah.

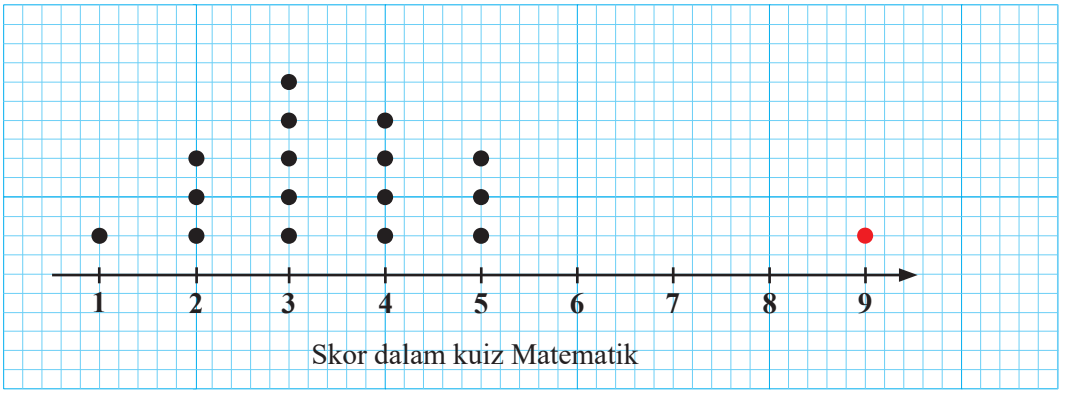
ZON INTERAKTIF

Bincangkan apa yang akan berlaku kepada nilai sukatan serakan yang lain apabila setiap cerapan dalam suatu set data dibahagi dengan suatu pemalar.

(c) Suatu nilai yang dimasukkan atau dikeluarkan merupakan pencilan.



Pencilan 9 dimasukkan



Dalam rajah di atas, apabila suatu pencilan dimasukkan dalam set data, didapati bahawa;

(i) serakan seluruh plot titik telah menjadi lebih lebar

(ii) julat skor asal = 5 – 1
= 4

julat skor baharu = 9 – 1
= 8

Julat bagi set data baharu menjadi lebih besar dibandingkan dengan julat bagi set data asal apabila suatu pencilan dimasukkan.

Secara generalisasi,

Nilai sukatan serakan bagi set data baharu akan menjadi lebih besar dibandingkan dengan nilai sukatan serakan bagi set data asal apabila suatu pencilan dimasukkan.

ZON INTERAKTIF

Bincangkan apa yang akan berlaku kepada nilai julat apabila suatu pencilan dikeluarkan daripada set data.

ZON INTERAKTIF

Bincangkan apa yang akan berlaku kepada nilai sukatan serakan yang lain apabila suatu pencilan dikeluarkan daripada set data.

Contoh 13

Diberi set data 4, 6, 7, 7, 9, 11, 12, 12. Hitung sisihan piawai bagi set data ini. Seterusnya hitung sisihan piawai baharu apabila

(a) 4 dikeluarkan (b) 7 ditambah (c) 18 ditambah

Penyelesaian:

$$\text{Min} = \frac{4 + 6 + 7 + 7 + 9 + 11 + 12 + 12}{8}$$
$$= 8.5$$

$$\text{Sisihan piawai, } \sigma = \sqrt{\frac{4^2 + 6^2 + 7^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2 + 12^2 + 12^2}{8} - 8.5^2}$$
$$= 2.784$$

(a) $$\text{Min baharu} = \frac{6 + 7 + 7 + 9 + 11 + 12 + 12}{7}$$
$$= 9.143$$

$$\text{Sisihan piawai baharu, } \sigma = \sqrt{\frac{6^2 + 7^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2 + 12^2 + 12^2}{7} - 9.143^2}$$
$$= 2.356$$

Apabila nilai yang jauh daripada min dikeluarkan, sisihan piawai baharu menjadi semakin kecil.

(b) $$\text{Min baharu} = \frac{4 + 6 + 7 + 7 + 7 + 9 + 11 + 12 + 12}{9}$$
$$= 8.333$$

$$\text{Sisihan piawai baharu, } \sigma = \sqrt{\frac{4^2 + 6^2 + 7^2 + 7^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2 + 12^2 + 12^2}{9} - 8.333^2}$$
$$= 2.668$$

Apabila nilai yang dekat dengan nilai min ditambah, sisihan piawai baharu menjadi semakin kecil.

(c) $$\text{Min baharu} = \frac{4 + 6 + 7 + 7 + 9 + 11 + 12 + 12 + 18}{9}$$
$$= 9.556$$

$$\text{Sisihan piawai baharu, } \sigma = \sqrt{\frac{4^2 + 6^2 + 7^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2 + 12^2 + 12^2 + 18^2}{9} - 9.556^2}$$
$$= 3.974$$

Apabila nilai yang jauh daripada min ditambahkan, sisihan piawai baharu menjadi semakin besar.

Praktis Kendiri 8.2d

1. Julat antara kuartil dan sisihan piawai bagi suatu set data ialah 6 dan 3.2 masing-masing. Hitung julat antara kuartil dan sisihan piawai yang baharu jika setiap cerapan dalam set data tersebut ditambah dengan 4.

2. Julat antara kuartil dan sisihan piawai bagi suatu set data ialah 3 dan 1.8 masing-masing. Hitung julat antara kuartil dan varians yang baharu jika setiap cerapan dalam set data tersebut didarab dengan 3.

3. Diberi suatu set data 4, 6, 7, 8, 10, 12, 16. Hitung sisihan piawai bagi set data ini. Terangkan perubahan pada nilai sisihan piawai jika 70 ditambah dalam set data tersebut.

4. (a) Tentukan sisihan piawai bagi set data berikut: 3, 4, 7, 9, 10.

(b) Gunakan hasil daripada (a) untuk menentukan sisihan piawai baharu bagi setiap set data berikut.

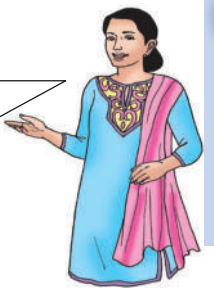
(i) 6, 8, 14, 18, 20 (ii) 1.5, 2, 3.5, 4.5, 5

5. Julat dan varians suatu set data ialah 25 dan 2.7 masing-masing. Jika setiap cerapan dalam set data tersebut ditambah dengan 2, kemudian didarab dengan 4, tentukan julat dan varians yang baharu.

6. Julat antara kuartil dan sisihan piawai suatu set data ialah 2.7 dan 3.6 masing-masing. Jika setiap cerapan dalam set data tersebut dibahagi dengan 3, kemudian ditolak dengan 2, tentukan julat antara kuartil dan sisihan piawai yang baharu.

Bagaimanakah anda membandingkan dan mentafsir dua atau lebih set data tak terkumpul berdasarkan sukatan serakan yang sesuai?

Sukatan kecenderungan memusat mungkin tidak memberi kita maklumat yang mencukupi untuk membuat perbandingan. Kita perlu menentukan sukatan serakan bagi suatu set data yang dapat memberikan suatu gambaran berkaitan dengan ciri-ciri data tersebut. Dengan demikian, kesimpulan yang dibuat adalah sah dan boleh diterima.



Standard Pembelajaran

Membandingkan dan mentafsir dua atau lebih set data tak terkumpul, berdasarkan sukatan serakan yang sesuai dan seterusnya membuat kesimpulan.

Contoh 14

Jadual di bawah menunjukkan masa yang diambil oleh 20 orang pekerja daripada dua buah kilang tertentu untuk menyiapkan sesuatu kerja.

Masa (jam)	5	6	7	8	9
Kilang A	3	2	9	2	4
Kilang B	1	5	7	5	2

Hitung min dan sisihan piawai bagi masa menyiapkan kerja tersebut. Seterusnya tentukan pekerja kilang manakah yang lebih cekap untuk menyiapkan kerja berkenaan. Berikan justifikasi anda.

Penyelesaian :

Kilang A

$$\text{Min, } \bar{x} = \frac{(5 \times 3) + (6 \times 2) + (7 \times 9) + (8 \times 2) + (9 \times 4)}{3 + 2 + 9 + 2 + 4}$$
$$= 7.1$$

$$\text{Sisihan piawai, } \sigma = \sqrt{\frac{(5^2 \times 3) + (6^2 \times 2) + (7^2 \times 9) + (8^2 \times 2) + (9^2 \times 4)}{3 + 2 + 9 + 2 + 4} - 7.1^2}$$
$$= 1.261$$

Kilang B

$$\text{Min, } \bar{x} = \frac{(5 \times 1) + (6 \times 5) + (7 \times 7) + (8 \times 5) + (9 \times 2)}{1 + 5 + 7 + 5 + 2}$$
$$= 7.1$$

$$\text{Sisihan piawai, } \sigma = \sqrt{\frac{(5^2 \times 1) + (6^2 \times 5) + (7^2 \times 7) + (8^2 \times 5) + (9^2 \times 2)}{1 + 5 + 7 + 5 + 2} - 7.1^2}$$
$$= 1.044$$

Pekerja dari Kilang B adalah lebih cekap kerana sisihan piawai baginya lebih kecil.

Praktis Kendiri 8.2e

1. Jadual di bawah menunjukkan catatan masa dalam saat, bagi acara larian 100 m dalam 5 percubaan bagi dua orang atlet sekolah.

Atlet A	12.78	12.97	12.56	12.34	13
Atlet B	12.01	13.03	12.98	12.84	12.79

Dengan menggunakan sukatan serakan yang sesuai, tentukan atlet manakah yang mempunyai pencapaian yang lebih konsisten.

2. Jadual di bawah menunjukkan suatu kajian yang dijalankan berkaitan dengan kesan dua jenis baja ke atas jumlah hasil tomato, dalam kg, bagi 10 batang pokok tomato masing-masing.

Baja A	**Baja B**
12, 18, 25, 30, 36, 36, 40, 42, 50, 54	25, 28, 30, 32, 32, 38, 40, 40, 42, 45

Dengan menggunakan sukatan serakan yang sesuai, tentukan baja manakah yang lebih sesuai digunakan untuk mendapatkan hasil yang baik.

Bagaimanakah anda boleh menyelesaikan masalah yang melibatkan sukatan serakan?

Standard Pembelajaran

Menyelesaikan masalah yang melibatkan sukatan serakan.

Contoh 15

Jadual di bawah menunjukkan maklumat bagi jisim dua kumpulan murid.

Kumpulan	Bilangan murid	Min	Varians
A	18	52	2.5
B	12	56	1.8

Semua murid daripada kumpulan A dan B akan digabungkan. Tentukan sisihan piawai bagi jisim kumpulan murid yang digabungkan.

Penyelesaian:

Memahami masalah

Menghitung sisihan piawai bagi gabungan jisim dua kumpulan murid.

Merancang strategi

Mengenal pasti Σx dan Σx^2 bagi kedua-dua kumpulan murid kemudian hitung Σx dan Σx^2 bagi gabungan dua kumpulan murid tersebut.

Melaksanakan strategi

Kumpulan A

$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{N}$

$52 = \frac{\Sigma x}{18}$

$\Sigma x = 936$

$\sigma^2 = \frac{\Sigma x^2}{N} - \bar{x}^2$

$2.5 = \frac{\Sigma x^2}{18} - 52^2$

$\Sigma x^2 = 48\,717$

Kumpulan B

$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{N}$

$56 = \frac{\Sigma x}{12}$

$\Sigma x = 672$

$\sigma^2 = \frac{\Sigma x^2}{N} - \bar{x}^2$

$1.8 = \frac{\Sigma x^2}{12} - 56^2$

$\Sigma x^2 = 37\,653.6$

Jumlah $\Sigma x = 936 + 672 = 1\,608$

Jumlah $\Sigma x^2 = 48\,717 + 37\,653.6 = 86\,370.6$

$\text{Min} = \frac{1\,608}{30} = 53.6$

$\text{Sisihan piawai, } \sigma = \sqrt{\frac{86\,370.6}{30} - 53.6^2}$

$= \sqrt{6.06}$

$= 2.462$

Kesimpulan

Nilai sisihan piawai baharu ialah 2.462.

Praktis Kendiri 8.2f

1. Jadual menunjukkan skor yang diperoleh tujuh orang peserta dalam satu pertandingan. Nilai skor disusun dalam tertib menaik.

Peserta	A	B	C	D	E	F	G
Skor	10	h	12	14	17	k	23

(a) Diberi bahawa julat antara kuartil dan min skor yang diperoleh ialah 7 dan 15 masing-masing. Hitung nilai h dan k.

(b) Hitung sisihan piawai bagi skor yang diperoleh bagi peserta-peserta ini.

2. Suatu set data mengandungi 20 nombor. Min dan sisihan piawai bagi nombor-nombor ini ialah 9 dan 2 masing-masing.

(a) Hitung nilai $\sum x$ dan $\sum x^2$.

(b) Beberapa nombor daripada set data ini dikeluarkan. Hasil tambah nombor-nombor yang dikeluarkan ini ialah 96 dengan min 8. Diberi bahawa hasil tambah kuasa dua nombor-nombor yang dikeluarkan ialah 800. Hitung varians bagi set data yang baharu.

Praktis Komprehensif

1. Hitung julat dan julat antara kuartil bagi setiap set data berikut.

(a) 8, 25, 16, 11, 24, 18, 22

(b) 27, 33, 45, 18, 62, 50

(c) 3.4, 2.8, 2.7, 4.3, 3.8, 3.2, 3.0, 2.9

(d) 12, 19, 17, 18, 15, 12, 17, 20, 22, 30, 32, 16, 18

2. Hitung julat dan julat antara kuartil bagi setiap set data berikut.

(a)

Diameter (cm)	6.0	6.2	6.4	6.6	6.8	7.0	7.2
Bilangan limau	6	9	12	18	20	10	5

(b)

Umur (tahun)	13	14	15	16	17	18
Bilangan peserta	12	18	21	20	21	8

3. Hitung varians dan sisihan piawai bagi set data yang berikut.
(a) 7, 9, 11, 8, 3, 7
(b) 50, 72, 63, 58, 55, 50, 70, 62, 66, 64
(c) 3.2, 4.4, 3.9, 4.1, 5.2, 4.8, 5.2
(d) 20, 27, 32, 47, 50, 38, 42, 40, 33, 37, 30

4. Suatu set data mengandungi tujuh nombor. Hasil tambah tujuh nombor ini ialah 84 dan hasil tambah kuasa dua bagi nombor-nombor ini ialah 1 920. Hitung varians dan sisihan piawai bagi set data ini.

5. Julat dan sisihan piawai suatu set nombor $x_1, x_2, x_3, ..., x_{10}$ ialah 10 dan 5.2 masing-masing. Hitung
(a) julat dan sisihan piawai bagi set nombor
$2x_1, 2x_2, 2x_3, ..., 2x_{10}$,

(b) julat dan sisihan piawai bagi set nombor
$\frac{x_1 - 1}{4}, \frac{x_2 - 1}{4}, \frac{x_3 - 1}{4}, ..., \frac{x_{10} - 1}{4}$.

6. Jisim suatu kumpulan yang terdiri daripada lapan orang murid mempunyai min 45 kg dan varians 2.5 kg^2. Hitung
(a) hasil tambah jisim bagi lapan orang murid ini.
(b) hasil tambah kuasa dua jisim murid ini.

7. Min bagi suatu set nombor $(m - 4)$, m, $(m + 2)$, $2m$, $(2m + 3)$ ialah 10.
(a) Hitung,
(i) nilai m
(ii) sisihan piawai
(b) Setiap nombor dalam set tersebut didarab dengan 3 dan kemudian ditambah dengan 2. Hitung varians bagi set data yang baharu.

8. Jadual di bawah menunjukkan maklumat bagi nilai n, Σx dan Σx^2 bagi suatu set data.

n	Σx	Σx^2
12	66	1452

(a) Hitung varians.
(b) Satu nombor p ditambah kepada set data ini dan didapati min bertambah sebanyak 0.5. Hitung,
(i) nilai p
(ii) sisihan piawai bagi set data yang baharu.

9. Hitung varians bagi set data $(p-4)$, $(p-2)$, $(p-1)$, p, $(p+4)$, $(p+9)$.

10. Jadual menunjukkan jisim pemain bagi dua pasukan sepak takraw.

Pasukan	Jisim (kg)
A	48, 53, 65, 69, 70
B	45, 47, 68, 70, 75

(a) Hitung min, julat, varians dan sisihan piawai bagi ukuran jisim pemain kedua-dua pasukan di atas.
(b) Adakah julat sesuai digunakan sebagai suatu sukatan serakan bagi mewakili data di atas? Berikan justifikasi anda.
(c) Tentukan pasukan yang mempunyai ukuran jisim yang diserakkan lebih jauh daripada nilai min jisim.

11. Hasil tambah bagi suatu set 10 nombor ialah 180 dan hasil tambah kuasa dua bagi set nombor ini ialah 3 800.

(a) Hitung min dan varians bagi nombor-nombor ini.
(b) Nombor 19 ditambah kepada set nombor-nombor ini. Hitung min dan varians yang baharu.

12. Jadual di bawah menunjukkan masa yang diluangkan, dalam jam, untuk mengulang kaji dalam seminggu oleh 32 orang murid.

Masa (jam)	1	2	3	4	5	6	7	10
Bilangan Murid	2	5	6	9	6	2	1	1

(a) Hitung julat , julat antara kuartil, varians dan sisihan piawai bagi taburan ini.
(b) Nyatakan sukatan serakan yang lebih sesuai digunakan untuk memberikan suatu gambaran yang lebih jelas berkenaan masa ulang kaji bagi kumpulan murid ini.

PROJEK

1. Anda akan belajar cara melukis graf-graf yang berbeza dengan menggunakan perisian geometrik dinamik.
2. Imbas *QR Code* untuk melakukan projek ini.
3. Cetak dan tampalkan hasil lukisan anda di Sudut Matematik.

Imbas *QR Code* untuk menjalankan aktiviti ini.
https://www.geogebra.org/classic/h4frqvzj

PETA KONSEP

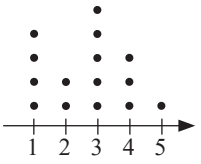
Sukatan Serakan

- Perwakilan Data
  - Plot Batang-dan-Daun

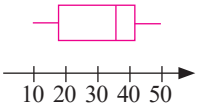
Batang	Daun
2	0 1 3 4
3	1 2 2 2 3 4
4	0 2 3 5 7
5	1 3 4 6

Kekunci
2 | 1 bermaksud 21

  - Plot Titik



  - Plot Kotak



- Julat
  = Nilai cerapan terbesar – nilai cerapan terkecil
- Kuartil
  - Kuartil pertama, Q_1
  - Kuartil ketiga, Q_3
  - Julat antara kuartil $= Q_3 - Q_1$
- **Varians**

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{N}$$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma x^2}{N} - \bar{x}^2$$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f(x-\bar{x})^2}{\Sigma f}$$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f x^2}{\Sigma f} - \bar{x}^2$$

- **Sisihan piawai**

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{N}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N} - \bar{x}^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f(x-\bar{x})^2}{\Sigma f}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f x^2}{\Sigma f} - \bar{x}^2}$$

Refleksi Kendiri

Bulatkan jawapan anda di dalam *word search* yang diberikan.

1. _____ ialah cerapan terbesar – cerapan terkecil.
2. Data yang membahagikan suatu set data digelar kuartil. Kuartil _____ ialah nilai data yang berada pada kedudukan $\frac{1}{4}$ yang pertama manakala kuartil _____ ialah nilai data yang berada pada kedudukan $\frac{3}{4}$ daripada susunan data tersebut.
3. _____ ialah suatu sukatan serakan yang merujuk kepada beza antara kuartil ketiga dengan kuartil pertama.
4. Julat, julat antara kuartil dan sisihan piawai digelar sukatan _____.
5. Plot _____ dapat mempamerkan taburan suatu set data.
6. Data dengan sisihan piawai yang kecil dikatakan lebih _____.
7. _____ ialah sukatan serakan yang mengukur serakan data-data di sekitar nilai min set data itu.

Q	Q	D	Y	M	D	M	K	Z	D	Z	R	L	Q	Y	J	Y	J	L
Z	G	R	R	J	Y	L	J	R	M	R	G	Y	K	L	W	L	I	R
K	U	A	R	T	I	L	K	E	T	I	G	A	K	R	Y	T	P	Q
I	J	D	N	B	M	D	M	N	L	D	L	Y	V	L	R	D	K	G
A	K	N	A	K	A	R	E	S	T	Z	X	Z	X	A	J	O	V	N
W	L	U	D	D	W	V	T	D	T	L	G	M	U	J	N	Z	Y	T
A	G	L	A	X	K	Q	L	D	Q	D	J	K	M	S	M	J	B	Y
I	R	L	M	R	L	T	Z	L	G	J	A	N	I	B	J	J	M	T
P	V	L	G	B	T	D	L	N	Q	R	X	S	B	Y	T	Y	D	W
N	D	J	T	N	B	I	B	V	A	J	T	K	L	G	M	T	R	T
A	B	M	K	L	L	M	L	T	J	E	L	N	R	L	P	G	L	L
H	L	Y	N	A	L	Z	N	P	N	U	Z	J	T	M	V	D	Z	B
I	Y	B	M	N	T	A	B	T	E	N	L	T	Z	Q	L	T	Y	P
S	G	M	K	R	T	O	Q	R	T	R	R	A	D	W	R	T	B	N
I	B	V	R	A	V	N	K	Y	L	L	T	J	T	D	L	L	J	G
S	B	M	L	R	L	B	L	T	B	J	T	A	R	J	B	K	Z	T
Z	L	U	Y	R	M	G	T	J	O	D	N	R	M	L	Z	D	P	B
R	J	V	G	R	D	N	D	R	M	I	N	R	M	A	R	W	B	D

Eksplorasi Matematik

1. Bahagikan murid kepada beberapa kumpulan yang sesuai.
2. Setiap kumpulan dikehendaki mendapatkan maklumat berkaitan dengan bulan kelahiran semua rakan di dalam kelas.
3. Berdasarkan maklumat yang diperoleh, bina perwakilan data yang sesuai.
4. Dengan menggunakan data ini, tentukan
   (a) julat (b) kuartil pertama (c) kuartil ketiga
   (d) julat antara kuartil (e) varians (f) sisihan piawai
5. Jalankan aktiviti Galeri Jelajah Minda (*Gallery Walk*) untuk melihat hasil kerja kumpulan lain.

Kebarangkalian Peristiwa Bergabung

Anda akan mempelajari

- Peristiwa Bergabung
- Peristiwa Bersandar dan Peristiwa Tak Bersandar
- Peristiwa Saling Eksklusif dan Peristiwa Tidak Saling Eksklusif
- Aplikasi Kebarangkalian Peristiwa Bergabung

Pasukan Bola Sepak Malaysia berjaya melayakkan diri ke Sukan Olimpik 1972 di Munich. Pada tahun 1974 pasukan Bola Sepak Malaysia memenangi pingat gangsa Sukan Asia di Tehran. Kejayaan pasukan Malaysia berterusan apabila layak berturut-turut ke Piala Asia pada tahun 1976 dan 1980. Bagi kali pertama Malaysia telah memenangi Piala Suzuki pada tahun 2010.

Tahukah anda bagaimanakah seseorang jurulatih menentukan pemain pertahanan, pemain tengah dan penyerang dalam satu pasukan?

Maslahat Bab

Selain bidang sukan, ilmu kebarangkalian digunakan dalam bidang insurans untuk menentukan premium. Ilmu kebarangkalian juga diaplikasikan dalam bidang pengeluaran dan perniagaan, terutamanya dalam pengurusan risiko.

JARINGAN KATA

- gambar rajah pokok
- kebarangkalian
- peristiwa bersandar
- peristiwa saling eksklusif
- peristiwa tak bersandar
- peristiwa tidak saling eksklusif
- ruang sampel

- *tree diagram*
- *probability*
- *dependent event*
- *mutually exclusive event*
- *independent event*
- *non mutually exclusive event*
- *sample space*

Imbasan Silam

Blaise Pascal
(1623 - 1662)

Blaise Pascal ialah seorang ahli matematik Perancis. Beliau juga merupakan seorang ahli fizik, pencipta, penulis dan sebagainya. Pascal mencipta teori kebarangkalian bersama dengan Pierre de Fermat, seorang ahli matematik Perancis. Teori kebarangkalian juga merupakan suatu asas matematik yang penting dalam bidang statistik.

http://yakin-pelajar.com/Pascal/9.pdf

9.1 Peristiwa bergabung

Apakah itu peristiwa bergabung?

Standard Pembelajaran

Memerihalkan peristiwa bergabung dan menyenaraikan peristiwa bergabung yang mungkin.

Dalam kehidupan seharian kita perlu membuat banyak keputusan berdasarkan ketidakpastian. Contohnya, membuat keputusan pemilihan masuk kelas sains tulen atau kelas sastera atau memilih produk yang akan dijual pada hari keusahawanan sekolah. Keputusan-keputusan ini melibatkan risiko dan kita sepatutnya boleh menilai risiko ini sebelum membuat keputusan. Kebarangkalian digunakan untuk menilai ketidakpastian yang terlibat dalam proses membuat keputusan.

Peristiwa bergabung ialah gabungan dua atau lebih peristiwa dalam satu kesudahan. Sebagai contoh, kesudahan yang mungkin bagi dua orang murid bermain "Gunting-Batu-Kertas" adalah (Gunting, Batu), (Gunting, Kertas), (Gunting, Gunting), (Batu, Gunting), (Batu, Kertas), (Batu, Batu), (Kertas, Gunting), (Kertas, Batu) dan (Kertas, Kertas). Peristiwa bergabung boleh terhasil daripada satu atau lebih eksperimen.

Kesudahan suatu peristiwa bergabung boleh diwakilkan dengan pasangan bertertib.

Rangsangan Minda 1

Tujuan: Menyenaraikan kesudahan dalam peristiwa bergabung.

Bahan: Syiling (10 sen, 20 sen dan 50 sen), satu kotak kosong.

Langkah:

1. Murid duduk secara berpasangan. Setiap pasangan murid disediakan satu kotak yang mengandungi tiga jenis syiling yang bernilai 10 sen, 20 sen dan 50 sen.
2. Setiap murid dalam pasangan memilih sekeping syiling dari kotak secara rawak. Nilai syiling dicatat dalam jadual di bawah.
3. Kembalikan syiling ke dalam kotak.
4. Ulangi langkah 2 dan 3 sebanyak 25 kali.

(10, 20)				

MEMORI SAYA

Ruang sampel ialah set yang mengandungi semua kesudahan yang mungkin bagi sesuatu eksperimen.

TIP

(10, 20)

- Syiling yang dipilih oleh murid pertama
- Syiling yang dipilih oleh murid kedua

5. Tulis ruang sampel bagi eksperimen pemilihan syiling daripada setiap pasangan murid tersebut.

$S = \{$ ____ $\}$

Perbincangan:

Apakah jumlah bilangan kesudahan yang mungkin dalam aktiviti ini?

Hasil daripada Rangsangan Minda 1, didapati bahawa;

Jumlah bilangan kesudahan yang mungkin ialah $3 \times 2 = 6$.

Secara generalisasi,

$$n(S) = n(A) \times n(B)$$

$n(S)$ ialah jumlah bilangan kesudahan yang mungkin, $n(A)$ dan $n(B)$ masing-masing mewakili bilangan kesudahan peristiwa A dan peristiwa B.

Contoh 1

Tulis ruang sampel bagi peristiwa bergabung di bawah.

(a) Lima keping kad berlabel dengan huruf "T, E, K, U, N" dimasukkan dalam sebuah kotak. Dua keping kad dikeluarkan dari kotak secara rawak satu demi satu tanpa pemulangan.

(b) Dua keping syiling dilambung (A dan G mewakili angka dan gambar masing-masing).

Penyelesaian:

(a) {(T, E), (T, K), (T, U), (T, N), (E, T), (E, K), (E, U), (E, N), (K, T), (K, E), (K, U), (K, N), (U, T), (U, E), (U, K), (U, N), (N, T), (N, E), (N, K), (N, U)}

(b) {(A, A), (A, G), (G, A), (G, G)}

Praktis Kendiri 9.1a

Tulis ruang sampel bagi peristiwa bergabung di bawah.

1. Dua buah buku dipilih secara rawak daripada sebuah rak buku yang mengandungi dua buah buku sejarah (S), sebuah buku geografi (G) dan sebuah buku matematik (M).

2. Jantina anak bagi keluarga yang mempunyai dua orang anak.

3. Sebiji dadu adil dan sekeping syiling adil dilambung secara serentak.

4. Azhar (A) dan Kai Ming (K) bermain maksimum lima set perlawanan badminton. Pemain yang berjaya memenangi tiga set ialah pemenang.

KPM

9.2 Peristiwa bersandar dan peristiwa tak bersandar

Standard Pembelajaran

Membezakan peristiwa bersandar dan peristiwa tak bersandar.

Bagaimanakah anda membezakan peristiwa bersandar dan peristiwa tak bersandar?

Peristiwa bergabung boleh dikategorikan kepada peristiwa bersandar dan peristiwa tak bersandar.

> Dua peristiwa A dan B ialah peristiwa tak bersandar jika peristiwa A tidak mempengaruhi kejadian peristiwa B dan sebaliknya.

Dengan kata lain, peristiwa A dan B ialah peristiwa bersandar sekiranya peristiwa A mempengaruhi kejadian peristiwa B.

Rangsangan Minda 2

Tujuan: Membezakan peristiwa bersandar dan peristiwa tak bersandar.

Langkah:

1. Bahagikan murid kepada beberapa kumpulan yang sesuai.
2. Lengkapkan jadual dalam Lembaran Aktiviti di bawah.

Lembaran Aktiviti:

Kotak P mengandungi lima keping kad berlabel dengan huruf "R, U, A, N, G".

(a) Kes I: Dua keping kad dipilih secara rawak dari kotak P satu demi satu tanpa pemulangan. Tulis kebarangkalian mendapat kad berhuruf konsonan pada kali pertama dan kali kedua dalam jadual berikut.

(b) Kes II: Dua keping kad dipilih secara rawak dari kotak P satu demi satu dengan pemulangan. Kad pertama yang dipilih dicatatkan hurufnya dan dikembalikan ke kotak P sebelum kad kedua dipilih. Tulis kebarangkalian mendapat kad berhuruf konsonan pada kali pertama dan kali kedua dalam jadual berikut.

Kes	Kebarangkalian untuk mendapatkan kad berhuruf konsonan	
	Kali Pertama	Kali Kedua
I		
II		

Perbincangan:

Mengapakah nilai kebarangkalian pada kali kedua bagi kes I dan kes II berbeza? Bincangkan.

Hasil daripada Rangsangan Minda 2, didapati bahawa;

Dalam kes I, kad berhuruf konsonan kali pertama yang dipilih tidak dipulangkan ke dalam kotak *P*. Kekurangan kad berhuruf konsonan yang pertama ini mempengaruhi kebarangkalian untuk memilih kad berhuruf konsonan yang kedua.

Secara generalisasi,

Peristiwa bergabung bagi kes I ialah peristiwa bersandar.

Dalam kes II, kad berhuruf konsonan yang dipilih pada kali pertama dipulangkan ke dalam kotak *P* sebelum kad kedua dipilih. Pulangan kad pertama ini menyebabkan kebarangkalian memilih kad berhuruf konsonan yang kedua sama dengan kebarangkalian pemilihan kad berhuruf konsonan yang pertama. Kebarangkalian pemilihan kad berhuruf konsonan yang kedua tidak dipengaruhi oleh pemilihan kad berhuruf konsonan yang pertama.

Secara generalisasi,

Peristiwa bergabung bagi kes II ialah peristiwa tak bersandar.

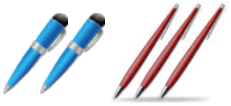
Contoh 2

Kenal pasti sama ada peristiwa bergabung di bawah ialah peristiwa bersandar atau peristiwa tak bersandar dan berikan justifikasi anda.

(a) Mendapat angka sebanyak dua kali apabila sekeping syiling adil dilambung dua kali.

(b) Mendapat angka dalam lambungan syiling adil dan nombor 4 dalam lambungan dadu adil.

(c) Mendapat dua batang pen yang berwarna sama apabila dua batang pen dikeluarkan satu demi satu dari bekas yang mengandungi tiga batang pen merah dan dua batang pen biru tanpa pemulangan.



(d) Mendapat dua keping kad yang berhuruf sama apabila dua keping kad dipilih secara rawak daripada kad berlabel dengan huruf "B, A, I, K" satu demi satu dengan pemulangan.

Penyelesaian:

(a) Peristiwa tak bersandar kerana kebarangkalian mendapatkan angka dalam lambungan syiling pertama tidak mempengaruhi kebarangkalian mendapat angka dalam lambungan syiling kedua.

(b) Peristiwa tak bersandar kerana kebarangkalian mendapat angka dalam lambungan syiling adil tidak mempengaruhi kebarangkalian mendapat nombor 4 dalam lambungan dadu adil.

(c) Peristiwa bersandar kerana kebarangkalian mendapat pen merah yang pertama akan mempengaruhi kebarangkalian mendapat pen merah yang kedua.

(d) Peristiwa tak bersandar kerana kebarangkalian kad pertama yang dipilih tidak mempengaruhi kebarangkalian kad kedua dipilih.

Praktis Kendiri 9.2a

Tentukan sama ada peristiwa-peristiwa berikut ialah peristiwa bersandar atau peristiwa tak bersandar.

1. Jarum putaran roda bertuah berhenti pada sektor yang sama dua kali berturut-turut.
2. Pilihan dua orang murid lelaki daripada sekumpulan murid yang terdiri daripada sepuluh orang murid perempuan dan empat belas orang murid lelaki secara rawak.
3. Menjawab tiga soalan objektif yang mempunyai empat pilihan jawapan masing-masing dengan betul sekiranya jawapan setiap soalan dipilih secara rawak.
4. Kotak P mengandungi dua keping kad berwarna merah dan tiga keping kad yang berwarna hitam manakala kotak Q mengandungi lima keping kad berwarna merah dan enam keping kad berwarna hijau. Sekeping kad dipilih secara rawak dari kotak P dan kemudian dimasukkan ke dalam kotak Q. Selepas itu, sekeping kad dipilih secara rawak dari kotak Q. Kedua-dua kad yang dipilih dari kotak P dan kotak Q berwarna sama.
5. Vincent dan Bajat menduduki ujian Sejarah di sekolah. Vincent dan Bajat lulus dalam ujian Sejarah.

Bagaimanakah anda membuat dan menentusahkan konjektur tentang rumus kebarangkalian peristiwa bergabung?

Rangsangan Minda 3

Tujuan: Membuat dan menentusahkan konjektur tentang rumus kebarangkalian peristiwa bergabung.

Langkah:

1. Bahagikan murid kepada beberapa kumpulan yang sesuai.
2. Lambungkan sebiji dadu adil dan sekeping syiling adil secara serentak.
3. Lengkapkan jadual di bawah dengan mencatatkan semua kesudahan yang mungkin.

Kesudahan	Syiling	
Dadu	Angka (A)	Gambar (G)
1		
2		
3		
4		
5		
6		

4. Daripada jadual di atas,
   (a) nyatakan ruang sampel bagi uji kaji di atas.
   (b) nyatakan kebarangkalian, dengan menyenaraikan semua kesudahan yang mungkin bagi peristiwa bergabung di bawah,
      (i) mendapat nombor genap dalam lambungan dadu dan angka dalam lambungan syiling.

Standard Pembelajaran

Membuat dan menentusahkan konjektur tentang rumus kebarangkalian peristiwa bergabung.

Indikator

- Kebarangkalian peristiwa A, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$
- $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
- $P(A) = 0$ apabila peristiwa A tidak akan berlaku
- $P(A) = 1$ apabila peristiwa A pasti berlaku.

(ii) mendapat nombor perdana dalam lambungan dadu dan gambar dalam lambungan syiling.
(iii) mendapat nombor yang kurang daripada 3 dalam lambungan dadu dan angka dalam lambungan syiling.

(c) Hitung hasil darab kebarangkalian
(i) mendapat nombor genap dalam lambungan dadu dan angka dalam lambungan syiling.
(ii) mendapat nombor perdana dalam lambungan dadu dan gambar dalam lambungan syiling.
(iii) mendapat nombor yang kurang daripada 3 dalam lambungan dadu dan angka dalam lambungan syiling.

Perbincangan:
Bandingkan jawapan anda di 4(b) dan 4(c). Apakah yang anda dapati?

Hasil daripada Rangsangan Minda 3, didapati bahawa;

Kebarangkalian persilangan dua peristiwa A dan B yang tak bersandar adalah sama dengan hasil darab kebarangkalian A dan kebarangkalian B.

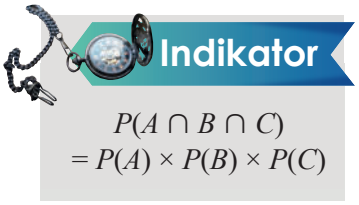
Secara generalisasi,

Hukum Pendaraban Kebarangkalian ialah $P(A \text{ dan } B) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Contoh 3

Sebuah kotak F mengandungi tujuh keping kad berlabel dengan huruf "P, A, M, E, R, A, N" dan sebuah kotak G mengandungi lima keping kad berlabel dengan nombor "3, 5, 6, 8, 11". Sekeping kad dipilih secara rawak dari kotak F dan kotak G masing-masing. Tentu sahkan konjektur rumus kebarangkalian untuk mendapat huruf "P" dan nombor genap dengan menyenaraikan semua kesudahan yang mungkin.

Penyelesaian:



(a) Hukum pendaraban

P (mendapat huruf "P") $= \frac{1}{7}$

P (mendapat nombor genap) $= \frac{2}{5}$

P (mendapat huruf "P" dan nombor genap) $= \frac{1}{7} \times \frac{2}{5}$

$= \frac{2}{35}$

Menyenaraikan semua kesudahan yang mungkin

Kesudahan yang mungkin = {(P, 6), (P, 8)}

$n(S) = 7 \times 5$

$= 35$

P (mendapat huruf "P" dan nombor genap) $= \frac{2}{35}$

Maka terbuktilah bahawa kedua-dua kaedah menghasilkan jawapan yang sama.

Praktis Kendiri 9.2b

1. Dua biji dadu adil dilambung.

(a) Lengkapkan jadual berikut dengan menulis kesudahan yang mungkin.

	Dadu Kedua					
Dadu Pertama	1	2	3	4	5	6
1		(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)		
2					(2, 5)	(2, 6)
3						
4						
5						
6						

(b) Nyatakan $n(S)$ dalam eksperimen ini.

(c) Tentu sahkan konjektur rumus kebarangkalian mendapat nombor ganjil dalam dadu pertama dan nombor perdana dalam dadu kedua dengan menyenaraikan semua kesudahan yang mungkin.

2. Kamal memilih dua biji guli secara rawak dari sebuah kotak yang mengandungi empat biji guli merah, tiga biji guli kuning dan sebiji guli hijau. Guli pertama dipulangkan ke dalam kotak sebelum guli kedua dipilih. Tentu sahkan konjektur rumus kebarangkalian bahawa kedua-dua biji guli berwarna kuning dipilih dengan menyenaraikan semua kesudahan yang mungkin.

3. Kotak *A* mengandungi sekeping kad berwarna merah dan dua keping kad berwarna kuning. Kotak *B* mengandungi tiga keping kad berwarna merah dan sekeping kad berwarna kuning. Fauziah memilih sekeping kad dari kotak *A* dan kotak *B* masing-masing. Tentu sahkan konjektur rumus kebarangkalian Fauziah mendapat dua keping kad kuning dengan menyenaraikan semua kesudahan yang mungkin.

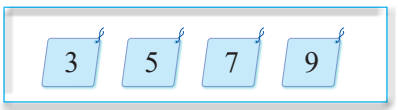
Bagaimanakah anda menentukan kebarangkalian peristiwa bergabung bagi peristiwa bersandar dan peristiwa tak bersandar?

Standard Pembelajaran

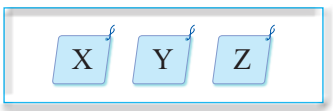
Menentukan kebarangkalian peristiwa bergabung bagi peristiwa bersandar dan peristiwa tak bersandar.

Contoh 4

Kotak *A* dan kotak *B* masing-masing mengandungi kad berlabel dengan nombor "3, 5, 7, 9" dan kad berlabel dengan huruf "X, Y, Z". Sekeping kad dipilih secara rawak masing-masing dari kotak *A* dan kotak *B*.



Kotak *A*



Kotak *B*

Hitung kebarangkalian mendapat faktor bagi 9 dan huruf "*Z*".

Penyelesaian:

P (Faktor bagi 9) $= \frac{2}{4}$

P (huruf "Z") $= \frac{1}{3}$

P(Faktor bagi 9 dan huruf "Z") $= \frac{2}{4} \times \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{6}$

Kaedah Alternatif

Faktor bagi 9 dan huruf "Z" = {(3, Z), (9, Z)}

$n(S) = 4 \times 3 = 12$

P(Faktor bagi 9 dan huruf "Z") $= \frac{2}{12}$

$= \frac{1}{6}$

Contoh 5

Sebuah beg mengandungi lapan biji guli hijau dan sebiji guli merah. Dua biji guli dipilih secara rawak dari beg tersebut satu demi satu tanpa pemulangan. Warna guli dicatat.

(a) Wakilkan situasi di atas dengan gambar rajah pokok.

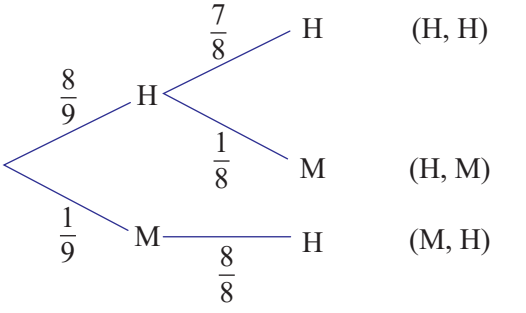
(b) Hitung kebarangkalian

(i) mendapat guli kedua berwarna merah,

(ii) mendapat kedua-dua biji guli berwarna hijau.

Penyelesaian:

(a)



MEMORI SAYA

Gambar rajah pokok memaparkan semua kesudahan yang berkemungkinan bagi sesuatu peristiwa. Setiap cabang dalam gambar rajah pokok mewakili satu kesudahan yang mungkin.

(b) (i) P(guli kedua berwarna merah) $= \frac{8}{9} \times \frac{1}{8}$

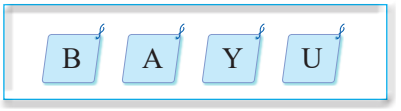
$= \frac{1}{9}$

(ii) P(kedua-dua biji guli berwarna hijau) $= \frac{8}{9} \times \frac{7}{8}$

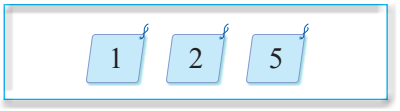
$= \frac{7}{9}$

Praktis Kendiri 9.2c

1. Kotak K dan kotak L masing-masing mengandungi empat keping kad berlabel dengan huruf "B, A, Y, U" dan tiga keping kad berlabel dengan nombor "1, 2, 5". Sekeping kad dipilih secara rawak dari kotak K dan kotak L masing-masing.



Kotak K



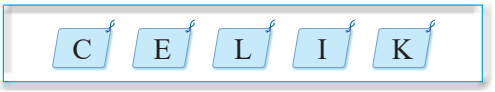
Kotak L

Dengan menyenaraikan semua kesudahan yang mungkin, hitung kebarangkalian mendapat huruf vokal dan nombor genap.

2. Sebiji dadu adil yang mempunyai empat muka dilabelkan dengan "1, 2, 3, 4". Dadu itu dilambung dua kali dan nombor yang berada di muka bawah dicatat. Dengan menyenaraikan semua kesudahan yang mungkin, hitung kebarangkalian mendapat kedua-dua nombor ganjil.

3. Berdasarkan kajian, kebarangkalian hari hujan di Gunung X pada bulan Mei ialah 0.45. Hitung kebarangkalian bahawa Gunung X akan mengalami dua hari hujan berturut-turut pada bulan Mei.

4. Kotak T mengandungi lima keping kad berlabel dengan huruf "C, E, L, I, K". Dua keping kad dikeluarkan secara rawak dari kotak T satu demi satu tanpa pemulangan.



Kotak T

Hitung kebarangkalian mendapat kad pertama berhuruf konsonan dan kad kedua berhuruf vokal.

5. Sebuah kotak mengandungi dua belas biji mentol. Dalam kotak mentol itu, terdapat dua biji mentol yang telah terbakar. Dua biji mentol dipilih secara rawak dari kotak mentol. Dengan melakarkan gambar rajah pokok, hitung kebarangkalian mendapat kedua-dua biji mentol terbakar.

6. Jadual di bawah menunjukkan bilangan ahli Persatuan Sains dan Matematik di SMK Didik Jaya.

Sesi	Bilangan Ahli	
	Perempuan	Lelaki
Pagi	146	124
Petang	82	96

Dua orang ahli dipilih secara rawak

(a) daripada ahli lelaki, hitung kebarangkalian kedua-dua orang ahli dipilih ialah murid sesi pagi (berikan jawapan anda betul kepada empat angka bererti).

(b) daripada sesi petang, hitung kebarangkalian kedua-dua orang murid dipilih ialah perempuan (berikan jawapan anda betul kepada empat angka bererti).

9.3 Peristiwa saling eksklusif dan peristiwa tidak saling eksklusif

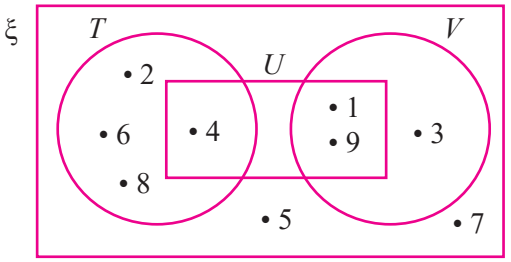
Bagaimanakah anda membezakan peristiwa saling eksklusif dan peristiwa tidak saling eksklusif?

Standard Pembelajaran
Membezakan peristiwa saling eksklusif dan peristiwa tidak saling eksklusif.

Bola pingpong yang berlabel dari 1 hingga 9 dimasukkan ke dalam satu bakul kosong. Seorang murid memilih sebiji bola pingpong dari bakul kosong tersebut secara rawak.
Katakan T ialah peristiwa mendapat nombor genap.
U ialah peristiwa mendapat nombor kuasa dua sempurna.
V ialah peristiwa mendapat faktor bagi 9.

Hubungan antara tiga peristiwa T, U dan V boleh digambarkan dengan gambar rajah Venn.

Daripada gambar rajah Venn di sebelah, didapati peristiwa T dan V tidak boleh berlaku pada masa yang sama. Maka, peristiwa T dan V dikatakan peristiwa saling eksklusif. Peristiwa T dan U ialah peristiwa tidak saling eksklusif kerana bola pingpong yang berlabel 4 ialah kesudahan sepunya bagi kedua-dua peristiwa T dan U. Adakah peristiwa U dan V peristiwa saling eksklusif? Bincangkan.



Rangsangan Minda 4

Tujuan: Membezakan peristiwa saling eksklusif dan peristiwa tidak saling eksklusif.

Langkah:

1. Bahagikan murid kepada beberapa kumpulan yang sesuai.
2. Lengkapkan Lembaran Aktiviti di bawah.

Lembaran Aktiviti:

Seorang murid dipilih secara rawak dari kelas anda. Yang berikut ialah peristiwa A hingga F.

Peristiwa A: Murid yang memakai cermin mata.
Peristiwa B: Ahli Pandu Puteri.
Peristiwa C: Murid lelaki.
Peristiwa D: Murid yang mendapat gred A dalam ujian Matematik.
Peristiwa E: Murid yang suka subjek Matematik.
Peristiwa F: Murid yang mendapat gred D dalam ujian Matematik.

Tandakan ✓ dalam peristiwa saling eksklusif atau peristiwa tidak saling eksklusif bagi setiap peristiwa gabungan berikut.

Peristiwa bergabung	Peristiwa saling eksklusif	Peristiwa tidak saling eksklusif
Peristiwa A dan B		
Peristiwa B dan C		
Peristiwa B dan D		
Peristiwa D dan E		
Peristiwa E dan F		
Peristiwa D dan F		

Perbincangan:

Daripada jadual di sebelah, adakah semua peristiwa saling eksklusif telah dinyatakan? Sekiranya tidak, nyatakan.

Hasil daripada Rangsangan Minda 4, didapati bahawa;

Setiap peristiwa bergabung di atas sama ada peristiwa saling eksklusif atau peristiwa tidak saling eksklusif bergantung pada ahli kumpulan dalam kelas masing-masing. Sekiranya hanya murid lelaki memakai cermin mata, maka peristiwa A dan B ialah saling eksklusif. Tetapi bagi kelas yang mempunyai murid perempuan yang memakai cermin mata maka peristiwa A dan B merupakan peristiwa tidak saling eksklusif.

Secara generalisasi,

Peristiwa gabungan A dan B dikenali sebagai peristiwa saling eksklusif sekiranya tidak ada persilangan antara peristiwa A dengan peristiwa B, $A \cap B = \phi$.

Contoh 6

Seorang pekerja dalam sebuah kilang dipilih secara rawak.
Diberi

A = Pekerja bergaji kurang daripada RM2 500.

B = Pekerja perlu membayar cukai pendapatan.

C = Pekerja pergi bekerja dengan menaiki kereta.

Tentukan sama ada pasangan peristiwa berikut ialah peristiwa saling eksklusif atau peristiwa tidak saling eksklusif.

(a) A dan B
(b) A dan C
(c) B dan C

ZON INFORMASI

Mulai tahun 2015, individu yang mempunyai pendapatan penggajian tahunan melebihi RM34,000 (selepas potongan KWSP) perlu mendaftar fail cukai pendapatan.

Lembaga Hasil Dalam Negeri, Kemaskini: 16 Mac 2017

Penyelesaian:

(a) Peristiwa A dan B tidak boleh berlaku bersama, maka A dan B ialah peristiwa saling eksklusif.

(b) Peristiwa A dan C boleh berlaku bersama, maka A dan C ialah peristiwa tidak saling eksklusif.

(c) Peristiwa B dan C boleh berlaku bersama, maka B dan C ialah peristiwa tidak saling eksklusif.

Praktis Kendiri 9.3a

1. Sebiji dadu adil dilambung. Senarai peristiwa berikut diberikan.

P ialah peristiwa mendapat nombor yang lebih besar daripada 4.

Q ialah peristiwa mendapat nombor genap.

R ialah peristiwa mendapat nombor kuasa dua sempurna.

Tentukan sama ada pasangan peristiwa berikut ialah peristiwa saling eksklusif atau peristiwa tidak saling eksklusif.

(a) P dan Q (b) P dan R (c) Q dan R

2. Sebiji telur dipilih secara rawak daripada ladang penternakan.

K ialah peristiwa telur yang dipilih retak.

L ialah peristiwa telur yang dipilih gred A.

M ialah peristiwa telur yang dipilih gred C.

Tentukan sama ada pasangan peristiwa berikut ialah peristiwa saling eksklusif atau peristiwa tidak saling eksklusif.

(a) *K* dan *L* (b) *K* dan *M* (c) *L* dan *M*

3. Seorang pelancong dipilih secara rawak di Lapangan Terbang Antarabangsa Kuala Lumpur.

R ialah peristiwa pelancong dipilih berasal dari Eropah.

S ialah peristiwa pelancong dipilih berasal dari negara ASEAN.

T ialah peristiwa pelancong dipilih berasal dari negara Komanwel.

Tentukan sama ada pasangan peristiwa berikut ialah peristiwa saling eksklusif atau peristiwa tidak saling eksklusif.

(a) *R* dan *S* (b) *R* dan *T* (c) *S* dan *T*

ZON INFORMASI

Negara Asean: Malaysia, Brunei, Singapura, Kemboja, Indonesia, Vietnam, Myanmar, Filipina, Thailand, Laos.
Negara Komanwel: Negara-negara yang pernah dijajah oleh British.

Bagaimanakah anda mengesahkan rumus kebarangkalian peristiwa bergabung bagi peristiwa saling eksklusif dan peristiwa tidak saling eksklusif?

Standard Pembelajaran

Mengesahkan rumus kebarangkalian peristiwa bergabung bagi peristiwa saling eksklusif dan peristiwa tidak saling eksklusif.

Rangsangan Minda 5

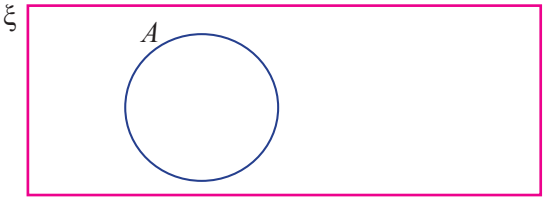
Tujuan: Mengesahkan rumus kebarangkalian peristiwa bergabung bagi peristiwa saling eksklusif dan peristiwa tidak saling eksklusif.

Langkah:

1. Bahagikan murid kepada beberapa kumpulan yang sesuai.
2. Teliti kes berikut:

Fahmi mengadakan rumah terbuka bersempena dengan perayaan Hari Raya Aidilfitri.
Sebanyak 80 orang tetamu mengunjungi rumah terbuka tersebut.
$\frac{2}{5}$ daripada tetamu yang mengunjungi rumah terbuka itu ialah rakan sekerja Fahmi.
Sebanyak 55 orang tetamu hadir bersama ahli keluarga. 18 daripadanya ialah rakan sekerja Fahmi.
$\frac{1}{10}$ daripada tetamu yang mengunjungi rumah terbuka itu ialah rakan sekolah anak Fahmi.
Semua rakan sekolah anak Fahmi tidak datang bersama ahli keluarga.
Seorang tetamu yang mengunjungi rumah terbuka Fahmi dipilih secara rawak.
A ialah peristiwa tetamu yang dipilih datang bersama ahli keluarga.
B ialah peristiwa tetamu yang dipilih ialah rakan sekerja Fahmi.
C ialah peristiwa tetamu yang dipilih ialah rakan sekolah anak Fahmi.

3. Lengkapkan gambar rajah Venn di bawah untuk menunjukkan hubungan antara peristiwa A, B dan C.



4. Berdasarkan gambar rajah Venn yang dilukis, lengkapkan jadual di bawah.

	Kebarangkalian			
(a)	$P(A) =$	$P(B) =$	$P(A \text{ dan } B) =$	$P(A \text{ atau } B) =$
(b)	$P(A) =$	$P(C) =$	$P(A \text{ dan } C) =$	$P(A \text{ atau } C) =$
(c)	$P(B) =$	$P(C) =$	$P(B \text{ dan } C) =$	$P(B \text{ atau } C) =$

Perbincangan:

1. Mengapakah $P(A \text{ dan } B)$, $P(A \text{ dan } C)$ dan $P(B \text{ dan } C)$ perlu ditentukan sebelum menghitung $P(A \text{ atau } B)$, $P(A \text{ atau } C)$ dan $P(B \text{ atau } C)$?

2. Berdasarkan jawapan (a), (b) dan (c) dalam jadual di atas, bentuk satu persamaan untuk menghubungkan keempat-empat kebarangkalian bagi setiap (a), (b) dan (c) di atas. Berikan justifikasi anda.

Hasil daripada Rangsangan Minda 5, didapati bahawa

1. $P(A \text{ dan } B)$, $P(A \text{ dan } C)$ dan $P(B \text{ dan } C)$ dikenal pasti dahulu supaya kita dapat menentukan sama ada peristiwa bergabung itu saling eksklusif atau tidak saling eksklusif.

2. (a) Peristiwa A dan B merupakan peristiwa bergabung tidak saling eksklusif kerana $P(A \cap B) \neq 0$, maka $P(A \text{ atau } B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

(b) Peristiwa A dan C serta peristiwa B dan C merupakan peristiwa bergabung saling eksklusif kerana $P(A \cap C) = 0$ dan $P(B \cap C) = 0$. Maka, $P(A \text{ atau } C) = P(A) + P(C)$ dan $P(B \text{ atau } C) = P(B) + P(C)$.

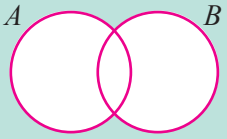
Secara generalisasi,

Rumus Penambahan Kebarangkalian ialah
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ atau $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

MEMORI SAYA

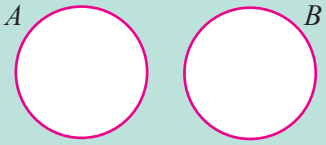
$P(A \text{ dan } B) = P(A \cap B)$
$P(A \text{ atau } B) = P(A \cup B)$

Peristiwa A dan B ialah peristiwa **tidak saling eksklusif**



$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Peristiwa A dan B ialah peristiwa **saling eksklusif**



$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

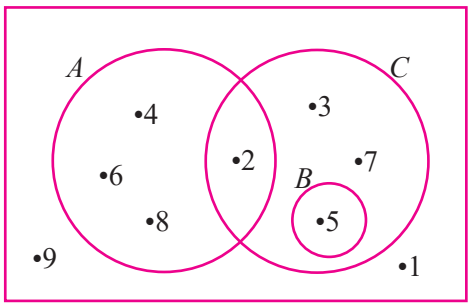
Contoh 7

Gambar rajah Venn di sebelah menunjukkan hubungan antara set semesta, ξ, A, B dan C.

Satu nombor dipilih secara rawak daripada set semesta, ξ. Tentu sahkan rumus penambahan kebarangkalian bagi setiap peristiwa bergabung berikut:

(a) Mendapat satu nombor genap atau nombor gandaan 5.

(b) Mendapat satu nombor genap atau nombor perdana.



Penyelesaian:

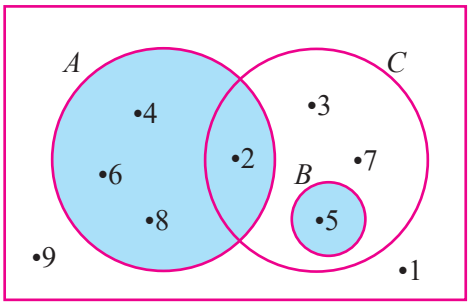
(a) $P(A \cup B) = \dfrac{n(A \cup B)}{n(S)}$

$= \dfrac{5}{9}$

$P(A) + P(B) = \dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{9}$

$= \dfrac{5}{9}$

Maka, terbukti $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.



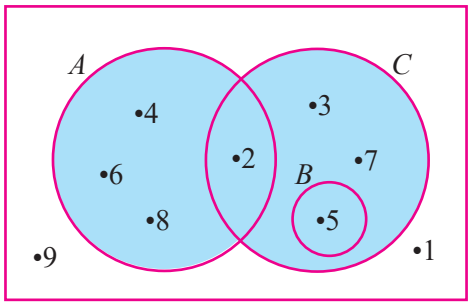
(b) $P(A \cup C) = \dfrac{n(A \cup C)}{n(S)}$

$= \dfrac{7}{9}$

$P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \dfrac{4}{9} + \dfrac{4}{9} - \dfrac{1}{9}$

$= \dfrac{7}{9}$

Maka, terbukti $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$.



Contoh 8

Lapan keping kad berlabel dengan nombor "4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11" diletakkan ke dalam sebuah kotak. Sekeping kad dipilih secara rawak dari kotak itu.

A ialah peristiwa mendapat satu nombor yang lebih besar daripada 8.

B ialah peristiwa mendapat satu nombor perdana.

C ialah peristiwa mendapat satu nombor genap.

Tentu sahkan rumus penambahan kebarangkalian bagi setiap peristiwa bergabung berikut dengan menyenaraikan semua kesudahan yang mungkin.

(a) $P(A$ atau $B)$ (b) $P(A$ atau $C)$ (c) $P(B$ atau $C)$

Penyelesaian:

(a) $A \cap B = \{11\}$,

$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} - \frac{1}{8}$

$= \frac{5}{8}$

$A = \{9, 10, 11\}, B = \{5, 7, 11\}$

$A \cup B = \{5, 7, 9, 10, 11\}$

$P(A \cup B) = \frac{5}{8}$

Maka, terbukti $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B)$.

(b) $A \cap C = \{10\}$,

$P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{3}{8} + \frac{4}{8} - \frac{1}{8}$

$= \frac{6}{8}$

$= \frac{3}{4}$

$A = \{9, 10, 11\}, C = \{4, 6, 8, 10\}$

$A \cup C = \{4, 6, 8, 9, 10, 11\}$

$P(A \cup C) = \frac{6}{8}$

$= \frac{3}{4}$

Maka, terbukti $P(A) + P(C) - P(A \cap C) = P(A \cup C)$.

(c) $B \cap C = \{\ \}$,

$P(B) + P(C) = \frac{3}{8} + \frac{4}{8}$

$= \frac{7}{8}$

$B = \{5, 7, 11\}, C = \{4, 6, 8, 10\}$

$B \cup C = \{4, 5, 6, 7, 8, 10, 11\}$

$P(B \cup C) = \frac{7}{8}$

Maka, terbukti $P(B) + P(C) = P(B \cup C)$.

Praktis Kendiri 9.3b

1. Dua biji dadu adil dilambung secara serentak.

Q ialah peristiwa mendapat jumlah mata daripada dua dadu lebih daripada 9.

R ialah peristiwa mendapat hasil darab mata daripada dua dadu ialah gandaan 5.

S ialah peristiwa mendapat dua mata yang sama daripada dua dadu.

Tentu sahkan rumus penambahan kebarangkalian bagi setiap peristiwa bergabung berikut dengan menyenaraikan semua kesudahan yang mungkin.

(a) $P(Q$ atau $R)$ (b) $P(Q$ atau $S)$ (c) $P(R$ atau $S)$

2. Dua keping syiling adil dilambung secara serentak.

J ialah peristiwa mendapat dua angka.

K ialah peristiwa mendapat dua gambar.

L ialah peristiwa mendapat sekurang-kurangnya satu angka.

Tentu sahkan rumus penambahan kebarangkalian bagi setiap peristiwa bergabung berikut dengan menyenaraikan semua kesudahan yang mungkin.

(a) $P(J$ atau $K)$ (b) $P(J$ atau $L)$ (c) $P(K$ atau $L)$

3. Tujuh keping kad berlabel dengan huruf "B, A, H, A, G, I, A" dimasukkan ke dalam sebuah kotak. Sekeping kad dipilih secara rawak.
L ialah peristiwa mendapat kad berhuruf vokal.
M ialah peristiwa mendapat kad berhuruf konsonan.
N ialah peristiwa mendapat kad berhuruf "B".
(a) Lukis satu gambar rajah Venn untuk mewakili hubungan antara peristiwa L, M dan N di atas.
(b) Tentu sahkan rumus penambahan kebarangkalian bagi setiap peristiwa bergabung berikut dengan menyenaraikan semua kesudahan yang mungkin.
(i) $P(L \text{ atau } M)$ (ii) $P(L \text{ atau } N)$ (iii) $P(M \text{ atau } N)$

ZON INTERAKTIF

Adakah $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$?
Bincangkan dengan gambar rajah Venn.

Bagaimanakah anda menentukan kebarangkalian peristiwa bergabung bagi peristiwa saling eksklusif dan peristiwa tidak saling eksklusif?

Standard Pembelajaran

Menentukan kebarangkalian peristiwa bergabung bagi peristiwa saling eksklusif dan peristiwa tidak saling eksklusif.

Contoh 9

Lima keping kad yang berlabel dengan huruf "C, I, N, T, A" dimasukkan ke dalam sebuah kotak. Sekeping kad dipilih secara rawak. Hitung kebarangkalian kad itu berlabel huruf konsonan atau "A".

Penyelesaian:

Kad yang berlabel huruf konsonan = {C, N, T}
Kad yang berlabel huruf "A" = {A}

$$P(\text{Kad yang berlabel huruf konsonan atau "A"}) = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}$$
$$= \frac{4}{5}$$

TIP

Bagi dua peristiwa saling eksklusif,
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Contoh 10

Dalam satu jamuan, kebarangkalian Zalifah dan Maran makan cendol masing-masing ialah $\frac{5}{7}$ dan $\frac{3}{5}$.

(a) Wakilkan kebarangkalian Zalifah dan Maran makan cendol dalam jamuan itu dengan gambar rajah Venn.

(b) Hitung kebarangkalian Zalifah atau Maran makan cendol dalam jamuan itu.

Penyelesaian:

(a) $P(\text{Kedua-dua Zalifah dan Maran makan cendol dalam jamuan itu})$
$$= \frac{5}{7} \times \frac{3}{5}$$
$$= \frac{3}{7}$$
$$P(\text{Hanya Zalifah makan cendol dalam jamuan itu}) = \frac{5}{7} - \frac{3}{7}$$
$$= \frac{2}{7}$$

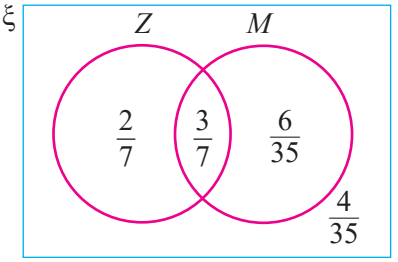
Malaysiaku

Cendol ialah sejenis pencuci mulut yang amat popular di Malaysia. Ramuannya terdiri daripada isi berwarna hijau yang dibuat daripada tepung beras dan air pandan, ais, santan dan gula melaka.

P(Hanya Maran makan cendol dalam jamuan itu)

$= \frac{3}{5} - \frac{3}{7}$

$= \frac{6}{35}$



(b) P(Zalifah atau Maran makan cendol dalam jamuan itu)

$= P(Z) + P(M) - P(Z \cap M)$

$= \frac{5}{7} + \frac{3}{5} - \frac{3}{7}$

$= \frac{31}{35}$

Kaedah Alternatif

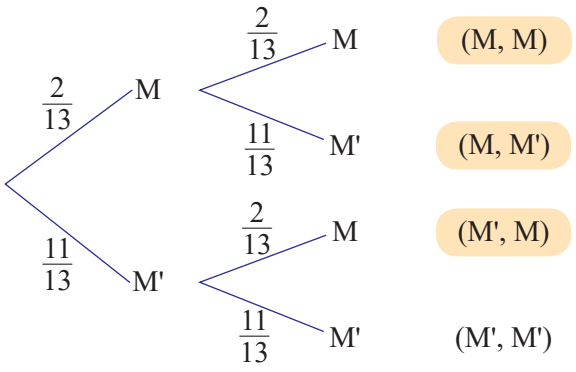
P(Zalifah atau Maran makan cendol dalam jamuan itu) $= \frac{2}{7} + \frac{3}{7} + \frac{6}{35}$

$= \frac{31}{35}$

Contoh 11

Kebarangkalian sebuah telefon pintar yang dihasilkan oleh Kilang Jaya mengalami masalah paparan ialah $\frac{2}{13}$. Dua buah telefon pintar dipilih secara rawak. Lakar satu gambar rajah pokok untuk menunjukkan semua kesudahan yang mungkin. Seterusnya, hitung kebarangkalian bahawa sekurang-kurangnya sebuah telefon pintar yang dipilih mengalami masalah paparan.

Penyelesaian:



M = Masalah paparan
M' = Tiada Masalah Paparan

ZON INTERAKTIF

Selain penyelesaian yang diberikan, apakah kaedah lain yang boleh digunakan untuk menyelesaikan contoh 11? Bincangkan.

P(Sekurang-kurangnya sebuah telefon pintar mengalami masalah paparan)

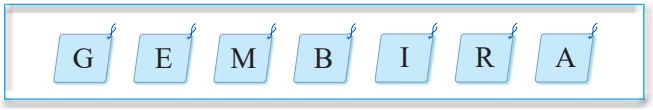
$= P(\text{M}, \text{M}) + P(\text{M}, \text{M}') + P(\text{M}', \text{M})$

$= \left(\frac{2}{13} \times \frac{2}{13}\right) + \left(\frac{2}{13} \times \frac{11}{13}\right) + \left(\frac{11}{13} \times \frac{2}{13}\right)$

$= \frac{48}{169}$

Praktis Kendiri 9.3c

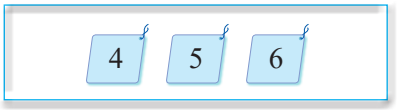
1. Tujuh keping kad yang berlabel dengan huruf "G, E, M, B, I, R, A" dimasukkan ke dalam sebuah kotak. Sekeping kad dipilih secara rawak dari kotak.



Dengan menyenaraikan semua kesudahan yang mungkin, hitung kebarangkalian kad yang dipilih berlabel huruf vokal atau "R".

2. Dua kotak yang berlabel *K* dan *L* masing-masing mengandungi empat keping kad berlabel dengan huruf "S, E, R, I" dan tiga keping kad berlabel dengan nombor "4, 5, 6". Sekeping kad dipilih secara rawak dari kotak *K* dan *L* masing-masing.

Kotak *K*



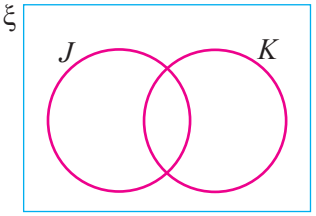
Kotak *L*

Dengan menyenaraikan semua kesudahan yang mungkin, hitung kebarangkalian mendapat huruf "S" dari kotak *K* atau nombor gandaan 3 dari kotak *L*.

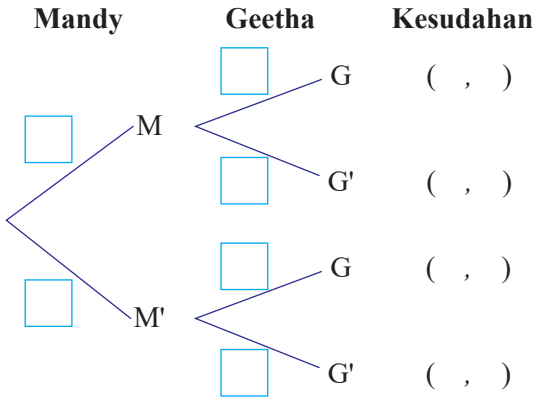
3. Kebarangkalian Jessie dilantik sebagai pengerusi Kelab Kewangan (*J*) dan ketua rumah sukan (*K*) masing-masing ialah $\frac{3}{8}$ dan $\frac{2}{9}$.

(a) Lengkapkan gambar rajah Venn di sebelah untuk mewakili hubungan kebarangkalian Jessie dilantik sebagai pengerusi Kelab Kewangan dan ketua rumah sukan.

(b) Hitung kebarangkalian Jessie tidak dilantik sebagai pengerusi Kelab Kewangan atau ketua rumah sukan.



4. Persatuan Geografi SMK Cerdik mengadakan rombongan lawatan sambil belajar ke Kota Kinabalu. Kebarangkalian Mandy dan Geetha menyertai rombongan ini masing-masing ialah $\frac{4}{7}$ dan $\frac{9}{14}$. Lengkapkan gambar rajah pokok di bawah. Seterusnya, hitung kebarangkalian hanya seorang daripada Mandy atau Geetha menyertai rombongan ini.



9.4 Aplikasi kebarangkalian peristiwa bergabung

Bagaimanakah anda menyelesaikan masalah yang melibatkan kebarangkalian peristiwa bergabung?

Standard Pembelajaran

Menyelesaikan masalah yang melibatkan kebarangkalian peristiwa bergabung.

Contoh 12

Sebiji dadu adil dilambung dua kali berturut-turut. Jika uji kaji ini dijalankan sebanyak 540 kali, berapa kalikah sekurang-kurangnya satu nombor kuasa dua sempurna akan diperoleh?

Penyelesaian:

Memahami masalah

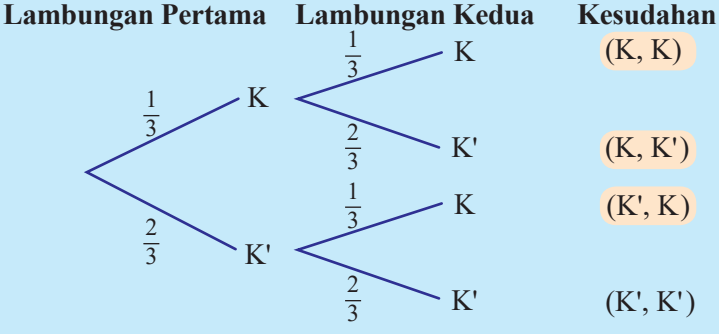
- Peristiwa bergabung tak bersandar.
- Nombor kuasa dua sempurna = 1, 4
- Sekurang-kurangnya satu nombor kuasa dua sempurna = (K, K), (K, K') atau (K', K)

Merancang strategi

- Lukis gambar rajah pokok.
- $P(\text{nombor kuasa dua sempurna}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- Hitung $P[(K, K) \cup (K, K') \cup (K', K)]$
- $P[(K, K) \cup (K, K') \cup (K', K)] \times 540$ kali

Melaksanakan strategi

K = Peristiwa mendapat nombor kuasa dua sempurna
K' = Peristiwa mendapat nombor bukan kuasa dua sempurna



$$P[(K, K) \cup (K, K') \cup (K', K)] = \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{9}$$

n (sekurang-kurangnya satu nombor kuasa dua sempurna)
$= \frac{5}{9} \times 540$
$= 300$ kali

Semak Jawapan

n (sekurang-kurangnya satu nombor kuasa dua sempurna)
$= \left(1 - \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\right) \times 540$
$= 300$

Kesimpulan

Sebanyak 300 kali untuk memperoleh sekurang-kurangnya satu nombor kuasa dua sempurna.

Contoh 13

Sebuah kotak mengandungi tujuh biji guli merah, lima biji guli kuning dan tiga biji guli biru. Dua biji guli dipilih secara rawak dari kotak satu demi satu. Sekiranya guli pertama berwarna biru, maka guli biru itu akan dipulangkan ke dalam kotak sebelum guli kedua dipilih. Sekiranya guli pertama bukan berwarna biru, maka guli itu tidak dipulangkan ke dalam kotak dan guli kedua dipilih.
Hitung kebarangkalian mendapat kedua-dua guli yang berlainan warna.

Penyelesaian:

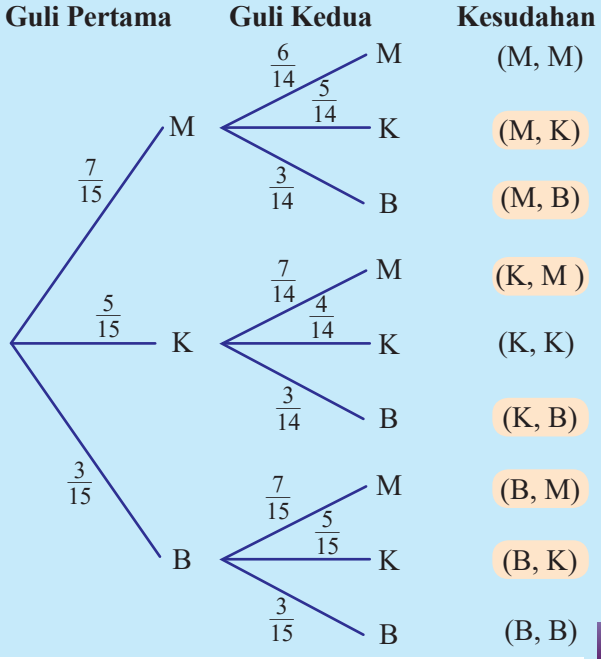
Memahami masalah

- Peristiwa bergabung bersandar
- Jumlah guli = 15 biji
- Kedua-dua guli berlainan warna
  = {(M, K), (M, B), (K, M), (K, B), (B, M), (B, K)}

Merancang strategi

- Lukis gambar rajah pokok
- Hitung $P[(M, K) \cup (M, B) \cup (K, M) \cup (K, B) \cup (B, M) \cup (B, K)]$

Melaksanakan strategi



$$P(\text{Guli yang berlainan warna}) = P(M, K) + P(M, B) + P(K, M) + P(K, B) + P(B, M) + P(B, K)$$
$$= \left(\frac{7}{15} \times \frac{5}{14}\right) + \left(\frac{7}{15} \times \frac{3}{14}\right) + \left(\frac{5}{15} \times \frac{7}{14}\right) + \left(\frac{5}{15} \times \frac{3}{14}\right) + \left(\frac{3}{15} \times \frac{7}{15}\right) + \left(\frac{3}{15} \times \frac{5}{15}\right)$$
$$= \frac{349}{525}$$

Kesimpulan

Kebarangkalian mendapat kedua-dua guli yang berlainan warna ialah $\frac{349}{525}$.

Semak Jawapan

Kaedah Pelengkap:

P(kedua-dua guli yang berlainan warna)
$= 1 - [P(M, M) + P(K, K) + P(B, B)]$
$$= 1 - \left[\left(\frac{7}{15} \times \frac{6}{14}\right) + \left(\frac{5}{15} \times \frac{4}{14}\right) + \left(\frac{3}{15} \times \frac{3}{15}\right)\right]$$
$$= \frac{349}{525}$$

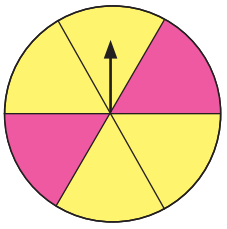
Praktis Kendiri 9.4a

1. Kajian tentang jantina anak terhadap 16 000 keluarga yang mempunyai dua orang anak telah dijalankan. Anggarkan bilangan keluarga yang mempunyai sekurang-kurangnya seorang anak lelaki dalam kajian tersebut.

2. Sebuah kotak mengandungi tiga batang pen kuning, lima batang pen merah dan sebatang pen hitam. Dua batang pen dipilih secara rawak dari kotak. Hitung kebarangkalian bahawa kedua-dua batang pen yang dipilih berwarna sama.

3. Jonathan suka menyaksikan matahari terbenam di tepi pantai. Jonathan mempunyai dua pilihan sama ada menginap di Pantai Jati atau Pantai Cengal selama dua hari.
Kebarangkalian hujan di Pantai Jati pada setiap petang ialah $\frac{19}{25}$.
Kebarangkalian hujan turun di Pantai Cengal pula bergantung pada hari sebelumnya. Jika hari sebelumnya tidak hujan, maka kebarangkalian hujan pada petang itu ialah $\frac{5}{7}$. Jika hari sebelumnya hujan, maka kebarangkalian hujan pada petang itu ialah $\frac{2}{5}$.
Jika cuaca cerah di kedua-dua pantai pada hari sebelum Jonathan bertolak, pantai yang manakah patut dipilih oleh Jonathan supaya dia dapat menyaksikan matahari terbenam di tepi pantai pada kedua-dua petang? Berikan justifikasi anda.

4. Setiap pelanggan Kedai Naga yang berbelanja melebihi RM200 akan diberi peluang memutar roda bertuah yang mempunyai enam sektor yang sama. Dua daripada sektor roda bertuah itu berwarna merah dan yang lain berwarna kuning.



	Bilangan baucar tunai	
	RM50	**RM10**
Kotak *A*	20	5
Kotak *B*	10	20

Jika jarum putaran roda bertuah berhenti di sektor berwarna merah, pelanggan tersebut berpeluang memilih baucar tunai dari kotak *A*. Jika jarum putaran roda bertuah berhenti di sektor berwarna kuning, pelanggan tersebut berpeluang memilih baucar tunai dari kotak *B*. Bilangan baucar tunai yang terdapat dalam kotak *A* dan kotak *B* ditunjukkan dalam jadual di atas.
Dianggarkan sebanyak 450 pelanggan Kedai Naga akan berbelanja melebihi RM200. Hitung bilangan baucar tunai bernilai RM10 yang perlu disediakan oleh Kedai Naga.
(Baucar tunai yang telah dipilih akan digantikan dengan baucar yang baharu oleh Kedai Naga supaya bilangan baucar tunai dalam kedua-dua kotak *A* dan *B* sentiasa kekal).

Praktis Komprehensif

1. Terdapat tiga batang pensel berwarna ungu dan dua batang pensel berwarna hijau dalam sebuah kotak. Dua batang pensel berwarna dipilih secara rawak dari kotak satu demi satu tanpa pemulangan. Tulis ruang sampel bagi pensel warna dipilih.

2. Satu nombor dipilih secara rawak dari set $S = \{x: x \text{ ialah integer}, 1 \leqslant x \leqslant 30\}$. Hitung kebarangkalian

(a) mendapat nombor gandaan 3 dan nombor gandaan 12.

(b) mendapat nombor faktor bagi 20 atau nombor faktor bagi 8.

3. Dua keping kad berlabel dengan nombor "77, 91" dimasukkan dalam kotak *M* dan tiga keping kad berlabel dengan huruf "R, I, A" dimasukkan dalam kotak *N*. Sekeping kad dipilih secara rawak dari kotak *M* dan *N* masing-masing.

(a) Lengkapkan jadual berikut dengan semua kesudahan yang mungkin.

Kotak *M*	**Kotak *N***		
	R	I	A
77	(77, *R*)		
91		(91, *I*)	

(b) Dengan menyenaraikan semua kesudahan yang mungkin, hitung kebarangkalian bahawa

(i) kad nombor dengan hasil tambah digit melebihi 10 dan kad konsonan dipilih.

(ii) kad nombor dengan hasil tambah digit melebihi 10 atau kad konsonan dipilih.

4. Dua orang pengawas dipilih secara rawak daripada lima orang pengawas yang terdiri daripada tiga orang pengawas tingkatan empat dan dua orang pengawas tingkatan lima. Lukis gambar rajah pokok untuk menunjukkan semua kesudahan yang mungkin. Kemudian, hitung kebarangkalian kedua-dua orang pengawas yang dipilih adalah daripada tingkatan yang sama.

5. Kebarangkalian Kam Seng lulus dalam mata pelajaran Fizik dan Kimia masing-masing ialah 0.58 dan 0.42. Hitung kebarangkalian bahawa

(a) Kam Seng lulus kedua-dua mata pelajaran,

(b) Kam Seng hanya lulus satu mata pelajaran.

6. Fatimah menghantar surat permohonan kerja ke tiga buah syarikat. Kebarangkalian Fatimah mendapat penawaran daripada syarikat *X*, *Y* dan *Z* masing-masing ialah $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{9}$ dan $\frac{5}{12}$. Hitung kebarangkalian Fatimah mendapat penawaran daripada

(a) mana-mana dua syarikat,

(b) sekurang-kurangnya satu syarikat.

7. Diberi peristiwa A dan B ialah dua peristiwa yang saling eksklusif dan $P(A) = \frac{1}{3}$,

(a) nyatakan nilai maksimum $P(B)$.

(b) jika $P(A \cup B) = \frac{7}{9}$, kenal pasti $P(B)$.

8. Kotak R mengandungi lima biji guli merah dan tujuh biji guli hijau manakala kotak T mengandungi empat biji guli merah dan lapan biji guli hijau. Sebiji guli dipilih secara rawak dari kotak R. Sekiranya guli itu berwarna merah, guli itu akan dimasukkan ke dalam kotak T. Sekiranya guli itu berwarna hijau, guli itu akan dikembalikan ke dalam kotak R. Seterusnya sebiji guli akan dipilih secara rawak dari kotak T. Warna guli yang dipilih akan dicatat.

(a) Hitung kebarangkalian

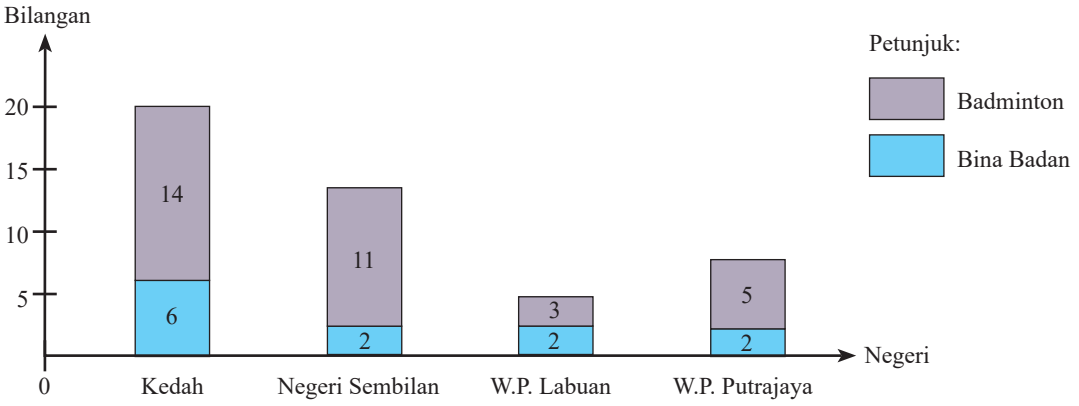
(i) kedua-dua biji guli yang dipilih berwarna merah,

(ii) kedua-dua biji guli yang dipilih berlainan warna.

(b) Kelas 4 Amanah mempunyai 36 orang murid. Sekiranya setiap murid daripada 4 Amanah diberi peluang memilih dua biji guli dengan keadaan seperti yang dinyatakan dan murid yang berjaya memilih dua biji guli yang berwarna hijau akan diberi hadiah bernilai RM5, anggarkan kos hadiah yang diperlukan.

9. Jacky mempunyai lapan helai baju kemeja dan tiga daripadanya berwarna biru. 40% daripada baju kemeja yang dimiliki oleh Halim berwarna biru. $\frac{1}{5}$ daripada baju kemeja yang dimiliki oleh Kumar berwarna biru. Jacky, Halim dan Kumar masing-masing memilih sehelai baju kemeja untuk menghadiri satu mesyuarat secara rawak. Hitung kebarangkalian bahawa dua orang daripada mereka akan memakai baju kemeja berwarna biru.

10. Carta bar di bawah menunjukkan bilangan kelab badminton dan kelab bina badan dalam negeri Kedah, Negeri Sembilan, Wilayah Persekutuan Labuan dan Wilayah Persekutuan Putrajaya.



Sebuah kelab badminton dan sebuah kelab bina badan dipilih secara rawak dari empat negeri ini. Hitung kebarangkalian

(a) kedua-dua kelab yang dipilih adalah dari negeri Kedah.

(b) sebuah kelab dipilih dari Wilayah Persekutuan dan Negeri Sembilan masing-masing.

11. Kebarangkalian Khaizan terbabit dalam kemalangan pada setiap pusingan perlumbaan motosikal ialah 0.4. Khaizan perlu meninggalkan perlumbaan motosikal sekiranya dia terlibat dalam kemalangan. Kebarangkalian Khaizan menang pada setiap pusingan perlumbaan motosikal ialah 0.96 dengan syarat dia tidak terlibat dalam kemalangan. Khaizan perlu berlumba tiga pusingan dalam suatu perlumbaan.

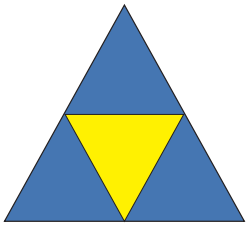
(a) Hitung kebarangkalian, betul kepada tiga tempat perpuluhan, bahawa

(i) Khaizan menjadi juara dalam perlumbaan tersebut,

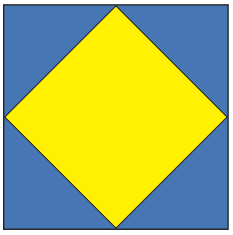
(ii) Khaizan tidak dapat menghabiskan perlumbaan tersebut.

(b) Berdasarkan jawapan daripada (a), adakah wajar Khaizan menasihati adiknya untuk menyertai perlumbaan motosikal? Nyatakan satu nilai murni yang telah anda pelajari untuk menyokong jawapan tersebut.

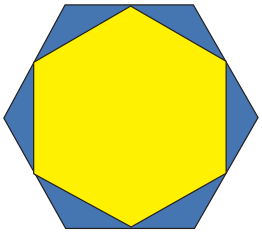
PROJEK



10 cm



10 cm



10 cm

1. Bina tiga poligon sekata seperti di atas. Poligon-poligon yang dibina mempunyai sisi berukuran yang sama.

2. Jalankan aktiviti seperti dalam kotak di bawah.

> Satu damak dibaling ke arah setiap poligon sekata di atas. Eksperimen ini dijalankan sebanyak dua puluh kali dan keputusan mengena tempat berwarna kuning dan biru dicatat seperti (K, K, K), (K, B, K).

3. Daripada dapatan yang dicatat, apakah kesimpulan anda. Huraikan sebab-sebab yang menyokong kesimpulan anda.

4. Eksplorasi lanjutan: Sekiranya anda pemilik gerai permainan pada Hari Keusahawanan sekolah anda, apakah bentuk poligon sekata yang akan anda pilih. Nyatakan sebab anda untuk menyokong pilihan tersebut.

PETA KONSEP

Kebarangkalian Peristiwa Bergabung

- Peristiwa Bersandar dan Peristiwa Tak Bersandar
  - A dan B Peristiwa Bersandar
    - Peristiwa A mempengaruhi kejadian peristiwa B.

    Contoh:
    Memilih dua keping kad dari kotak mengandungi kad berlabel "B, A, I, K" satu demi satu tanpa pemulangan.
  - A dan B Peristiwa Tak Bersandar
    - Peristiwa A tidak mempengaruhi kejadian peristiwa B.

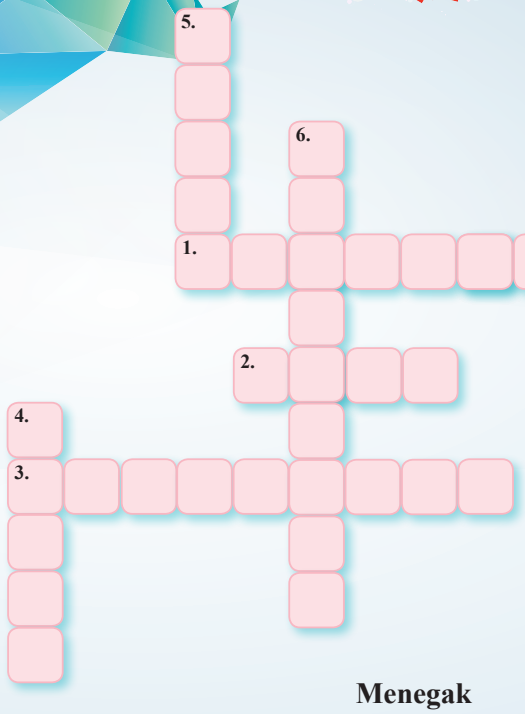
    Contoh:
    Sebiji dadu adil dilambung dua kali. Mendapat dua kali "6".
  - Hukum Pendaraban Kebarangkalian
    $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

    Contoh:
    Sebiji dadu adil dilambung dua kali. Mendapat dua kali "6".
    $P(\text{dua kali "6"}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$
    $= \frac{1}{36}$
- Hukum Penambahan Kebarangkalian
  - A dan B Peristiwa Saling Eksklusif jika $A \cap B = \phi$,
    $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

    Contoh: $X = \{x : 1 \leqslant x \leqslant 10, x \in \mathbf{W}\}$
    Satu nombor dipilih secara rawak dari set X. Kebarangkalian memilih nombor 2 atau nombor ganjil.
    $P(\text{Nombor 2 atau nombor ganjil})$
    $= \frac{1}{10} + \frac{5}{10}$
    $= \frac{3}{5}$
  - A dan B Peristiwa Tidak Saling Eksklusif jika $A \cap B \neq \phi$,
    $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

    Contoh: $X = \{x : 1 \leqslant x \leqslant 10, x \in \mathbf{W}\}$
    Satu nombor dipilih secara rawak dari set X. Kebarangkalian memilih nombor perdana atau nombor ganjil.
    $P(\text{Nombor perdana atau nombor ganjil})$
    $= \frac{4}{10} + \frac{5}{10} - \frac{3}{10}$
    $= \frac{3}{5}$
- Aplikasi Kebarangkalian Peristiwa Bergabung

Refleksi Kendiri



Melintang

1. Dua peristiwa A dan B ialah peristiwa tak ____ jika peristiwa A berlaku tidak mempengaruhi peristiwa B berlaku dan sebaliknya.

2. Sebuah ____ dan syiling dilambung, bilangan kesudahan ialah 12.

3. A dan B peristiwa saling ____ bermakna tiada persilangan antara peristiwa A dan B.

Menegak

4. Satu nombor dipilih daripada $\{x : x$ ialah integer dan $0 < x < 50\}$.
K ialah peristiwa mendapat nombor ____ dan L ialah peristiwa mendapat nombor ganjil.
$P(K \cup L) = P(K) + P(L)$

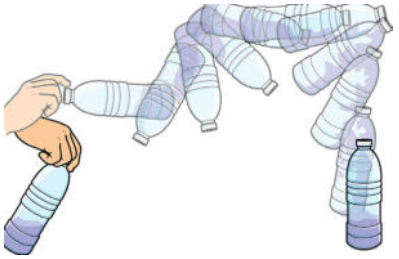
5. $P(A$ dan $B) = P(A)$ ____ $P(B)$.

6. Peristiwa ____ ialah kesudahan peristiwa daripada kesatuan atau persilangan dua atau lebih peristiwa.

Eksplorasi Matematik

Lambungan botol ialah suatu permainan yang melambung suatu botol air plastik sama ada penuh atau sebahagian penuh dengan air ke atas supaya botol itu terbalik dan kemudian berdiri tegak semula.

Cuba terokai faktor-faktor yang mempengaruhi kebarangkalian menjayakan lambungan botol.



BAB

10

Matematik Pengguna: Pengurusan Kewangan

Anda akan mempelajari

- Perancangan dan Pengurusan Kewangan

Perancangan dan pengurusan kewangan perlu diamalkan oleh setiap individu. Keputusan kewangan perlu dirancang seperti permainan catur. Setiap keputusan kewangan yang dibuat haruslah dipertimbangkan sebelum mengambil langkah seterusnya. Pengurusan kewangan secara berhemah akan membantu seseorang individu bebas daripada bebanan hutang.

Sejauh manakah bajet bulanan membantu seseorang mencapai matlamat kewangan?

Maslahat Bab

Pengurusan kewangan yang efisien diperlukan dalam kehidupan seharian. Pengetahuan tentang pengurusan kewangan boleh diaplikasikan dalam bidang perakaunan, bursa saham, perniagaan dan sebagainya.

JARINGAN KATA

• aliran tunai	• *cash flow*
• aset	• *asset*
• bebas hutang	• *debt freedom*
• jangka panjang	• *long term*
• jangka pendek	• *short term*
• matlamat kewangan	• *financial goal*
• pendapatan	• *income*
• pelaburan	• *investment*
• perbelanjaan	• *expense*

Imbasan Silam

Tan Sri Dr Zeti Akhtar Aziz

Menurut bekas gabenor Bank Negara Malaysia, Tan Sri Dr Zeti Akhtar Aziz, pendidikan kewangan amat penting bagi melahirkan masyarakat yang cekap dalam pengurusan kewangan dan kemahiran ini perlu diterapkan pada usia muda. Bank Negara Malaysia telah memperkenalkan Buku Wang sejak tahun 1999 bagi murid sekolah.

http://yakin-pelajar.com/Zeti/10.pdf

10.1 Perancangan dan Pengurusan Kewangan

Apakah yang dimaksudkan dengan proses pengurusan kewangan?

Standard Pembelajaran

Menghuraikan proses pengurusan kewangan yang berkesan.

Pengurusan kewangan merupakan suatu proses yang melibatkan pengurusan wang daripada sumber pendapatan terhadap simpanan, perbelanjaan, perlindungan dan pelaburan. Terdapat lima langkah dalam proses pengurusan kewangan.

Menetapkan matlamat kewangan

Menetapkan matlamat kewangan merupakan langkah pertama dalam proses pengurusan kewangan. Matlamat kewangan yang ditentukan mestilah mengikut keutamaan dan spesifik. Contohnya, seseorang individu yang hendak menyimpan RM15 000 dalam bank bagi tempoh masa tiga tahun sebelum berkahwin.

TIP

Berdisiplin dan konsisten untuk mengikuti perancangan kewangan yang ditetapkan akan membantu seseorang individu untuk mencapai tujuan matlamat kewangan.

(a) Matlamat kewangan jangka pendek

Matlamat kewangan jangka pendek merupakan suatu matlamat kewangan yang hendak dicapai kurang daripada setahun. Matlamat kewangan jangka pendek tidak melibatkan jumlah amaun yang besar. Contohnya pembelian komputer riba, kerusi sofa, telefon bimbit dan sebagainya.

(b) Matlamat kewangan jangka panjang

Matlamat kewangan jangka panjang merupakan suatu matlamat kewangan yang mengambil masa lebih daripada lima tahun. Matlamat kewangan jangka panjang melibatkan jumlah amaun yang banyak. Contohnya seseorang individu perlu mempunyai simpanan untuk digunakan pada masa persaraan, pendidikan anak dan sebagainya.

ZON INFORMASI

Jumlah Perbelanjaan Harian	
Sarapan	RM5
Makan tengah hari	
Fotostat	
Tambang bas	
Lain-lain	

Pengamalan catatan perbelanjaan harian seperti di atas akan memastikan kita berbelanja secara terkawal berdasarkan jumlah wang yang diterima daripada ibu bapa.

Tempoh masa untuk mencapai sesuatu matlamat kewangan bergantung pada jumlah peratusan simpanan bulanan seseorang daripada pendapatan. Namun keadaan ini bergantung pada cara seseorang itu merancang.

Dalam merancang kewangan, perkara paling penting yang perlu dibuat ialah menetapkan matlamat kewangan. Semasa menentukan matlamat kewangan, seseorang haruslah memberikan keutamaan perbelanjaan kepada keperluan daripada kehendak. Contohnya, keperluan asas seperti makanan, tempat tinggal dan pakaian perlu diutamakan.

Kehendak ialah keinginan untuk menjalani kehidupan mewah. Perbelanjaan mengikut kehendak akan menyebabkan seseorang berbelanja lebih daripada pendapatan yang diperoleh. Perancangan kewangan yang cekap akan membantu seseorang individu bebas daripada masalah kewangan serta mewujudkan simpanan yang mencukupi bagi menghadapi waktu kecemasan.

Matlamat kewangan SMART

Matlamat kewangan atau *financial goals* yang jelas ialah satu aspek paling penting dalam perancangan kewangan. Selain itu, matlamat kewangan yang berkonsep SMART akan membantu seseorang individu untuk mengawal perbelanjaan supaya dapat mencapai matlamat kewangan yang dikehendaki.

Lima kunci komponen utama dalam strategi ini ialah,

Specific	Measurable	Attainable	Realistic	Time-bound
[khusus]	[boleh diukur]	[Boleh dicapai]	[Bersifat realistik]	[Tempoh masa]

Contoh 1

Encik Yusuf akan menyambut Hari Keluarga di Port Dickson dalam tempoh 6 bulan. Sambutan ini akan menelan perbelanjaan sebanyak RM1 500. Encik Yusuf perlu menyimpan RM250 sebulan daripada pendapatannya sebanyak RM2 500 sebulan untuk mencapai matlamat kewangan beliau. Adakah matlamat kewangan Encik Yusuf memenuhi pendekatan SMART?

Penyelesaian:

Specific [Khusus]

Matlamat Encik Yusuf adalah untuk menyambut Hari Keluarga di Port Dickson. Dalam hal ini, matlamat Encik Yusuf bukan sekadar ingin pergi bercuti tetapi beliau menetapkan lokasi yang *specific* (khusus).

Measurable [Boleh diukur]

Matlamat khusus Encik Yusuf boleh dihitung kerana beliau mengetahui jumlah wang yang akan diperlukan untuk menyambut Hari Keluarga. Dalam hal ini, matlamat Encik Yusuf bukan sekadar memerlukan wang tetapi beliau mengetahui jumlah wang yang diperlukan untuk menyambut Hari Keluarga tersebut.

Attainable [Boleh dicapai]

Matlamat kewangan Encik Yusuf boleh dicapai dengan menyimpan RM250 sebulan daripada jumlah pendapatan bulanan beliau sebanyak RM2 500.

Realistic [Bersifat realistik]

Matlamat kewangan Encik Yusuf yang hendak menyambut Hari Keluarga di Port Dickson dalam masa 6 bulan adalah bersifat realistik. Beliau akan menyimpan RM250 sebulan untuk mencapai tujuan tersebut.

Time-bound [Tempoh masa]

Matlamat kewangan Encik Yusuf mempunyai tempoh masa iaitu enam bulan.

Oleh itu, Encik Yusuf mengamalkan matlamat kewangan berpandukan konsep SMART.

Menilai kedudukan kewangan

Aset dan liabiliti menjadi kayu pengukur bagi menilai kedudukan kewangan. Contoh aset yang boleh dimiliki oleh seseorang individu ialah wang tunai, simpanan, pelaburan hartanah, simpanan tetap, amanah saham atau saham syarikat.

TIP

Sebagai panduan am, simpan wang untuk keperluan asas sekurang-kurangnya enam bulan.

Liabiliti merupakan pinjaman bank, hutang kad kredit dan sebagainya. Selain itu, anda juga patut mengetahui bayaran yang perlu dibuat seperti sewa rumah dan bil utiliti yang belum dijelaskan.

Menilai kedudukan kewangan membantu anda mengukur prestasi dalam usaha mencapai matlamat kewangan jangka pendek dan jangka panjang.

Mewujudkan pelan kewangan

Pengurusan kehidupan berdasarkan pelan kewangan membantu seseorang memantau aliran tunai. Terdapat dua komponen penting dalam pelan kewangan yang dibina, iaitu sumber pendapatan dan perbelanjaan.

Pendapatan terdiri daripada **pendapatan aktif** dan **pasif**. Pendapatan aktif merupakan pendapatan utama iaitu gaji, elaun, komisen dan sumber kewangan lain. Pendapatan pasif terdiri daripada sewa yang diterima, faedah yang diterima, dividen dan lain-lain. Kedua-dua pendapatan ini merupakan aliran tunai masuk.

Perbelanjaan terdiri daripada **perbelanjaan tetap** dan **perbelanjaan tidak tetap**. Perbelanjaan tetap ialah perbelanjaan yang mesti dibayar atau dibelanjakan seperti sewa rumah, bayaran insurans, ansuran rumah, ansuran kereta, dan bayaran kad kredit.

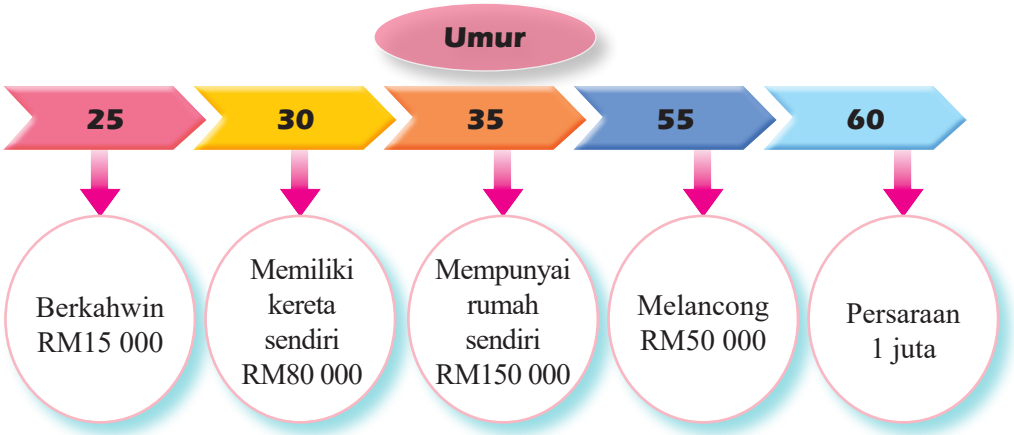
Perbelanjaan tidak tetap akan berubah setiap bulan mengikut corak perbelanjaan seseorang individu. Contohnya adalah seperti perbelanjaan petrol, barangan dapur, pembayaran bil elektrik, bil air dan sebagainya. Kedua-dua perbelanjaan ini merupakan aliran tunai keluar.

Aliran tunai positif akan wujud jika jumlah pendapatan melebihi jumlah perbelanjaan.

Aliran tunai negatif akan wujud jika jumlah pendapatan kurang daripada jumlah perbelanjaan.

Langkah-langkah yang perlu diambil kira sebelum mewujudkan pelan kewangan.

Contoh matlamat kewangan seseorang individu.



Pengurusan kewangan yang cekap membantu seseorang menyusun strategi yang perlu diambil terhadap corak perbelanjaan supaya dapat mengumpul simpanan bulanan.

Matlamat	Tahun Mula	Tahun Sasaran	Tempoh (Tahun)	Jumlah (RM)	Komitmen Simpanan Sebulan (RM)
Berkahwin	2019	2022	3	15 000	
Memiliki Kereta	2023	2027	4	20 000 (wang pendahuluan)	

Contoh 2

Encik Derrick menerima pendapatan aktif sebanyak RM3 000, dan pendapatan pasif sebanyak RM1 000 dalam sebulan. Encik Derrick juga mempunyai perbelanjaan tetap sebanyak RM1 350 dan perbelanjaan tidak tetap sebanyak RM650 sebulan.

(a) Hitung aliran tunai bulanan Encik Derrick. Jelaskan jawapan anda.

(b) Jelaskan aliran tunai Encik Derrick jika pendapatan pasif Encik Derrick tidak wujud dan jumlah perbelanjaan juga meningkat sebanyak 60%.

Penyelesaian:

(a) Jumlah pendapatan – Jumlah perbelanjaan
= RM3 000 + RM1 000 – RM1 350 – RM650
= RM2 000 (Aliran tunai positif)

Aliran tunai positif sebanyak RM2 000 adalah baik kerana Encik Derrick mempunyai lebihan daripada pendapatan setelah menolak perbelanjaan. Hal ini membolehkan beliau melabur atau menghadapi situasi kecemasan jika berlaku.

(b) Jumlah pendapatan – Jumlah perbelanjaan
= RM3 000 – RM3 200
= RM200 (Aliran tunai negatif)

Aliran tunai negatif akan membebankan Encik Derrick dan mungkin menyebabkan beliau menggunakan kemudahan kad kredit bagi mengatasi masalah kewangan.

Contoh 3

Cik Janani bekerja sebagai seorang guru swasta. Beliau menerima pendapatan sebanyak RM3 500. Beliau juga mengajarkan tuisyen dan memperoleh pendapatan sebanyak RM1 000. Cik Janani juga menyewakan rumahnya sebanyak RM850 sebulan. Cik Janani mempunyai perbelanjaan tetap sebanyak RM1 200 dan perbelanjaan tidak tetap sebanyak RM600 sebulan.

Hitung aliran tunai bulanan Cik Janani. Jelaskan jawapan anda.

Penyelesaian:

RM3 500 + RM1 000 + RM850 – RM1 200 – RM600
= RM3 550 (Aliran tunai positif)

Aliran tunai positif sebanyak RM3 550 adalah baik kerana Cik Janani boleh menyimpan wang tersebut di bank dan menikmati faedah. Faedah ini merupakan pendapatan pasif bagi Cik Janani.

Melaksanakan pelan kewangan

Pelaksanaan pelan kewangan menukarkan perancangan kewangan kepada tindakan yang boleh dilaksanakan.

Semasa melaksanakan pelan kewangan, seseorang individu harus mengikuti perancangan pada peringkat awal. Seseorang individu haruslah sedia mengubah dan membuat perbandingan antara perbelanjaan bulanan yang dirancang dengan perbelanjaan sebenar. Hal ini memberikan peluang untuk mengenal pasti sebarang pembaziran dan seterusnya mengurangkan perbelanjaan sebenar agar dapat mencapai perbelanjaan bulanan seperti yang dirancang.

Contohnya, perbelanjaan Encik Yasir yang dirancang dan perbelanjaan sebenar dalam bulan pertama.

Perbelanjaan	Perbelanjaan bulanan dirancang (RM)	Perbelanjaan sebenar (RM)
Bil elektrik	150	200
Makanan	600	850

Perbelanjaan Encik Yasir menunjukkan pertambahan ke atas bil elektrik dan makanan daripada yang dirancang bagi mencapai matlamat kewangan. Oleh itu, Encik Yasir perlu mengurangkan penggunaan tenaga elektrik sebanyak RM50. Encik Yasir juga perlu mengurangkan jumlah perbelanjaan untuk makanan, sebanyak RM250.

Semasa melaksanakan pelan kewangan, kita harus mengutamakan pembayaran perbelanjaan tetap. Contohnya ansuran rumah, pembayaran kad keredit, ansuran kereta dan sebagainya. Pembayaran lewat ansuran tersebut akan menyebabkan pembayaran faedah tambahan. Contohnya, caj lewat bayar akan dikenakan.

ZON INFORMASI

Antara punca rakyat Malaysia muflis adalah kerana gagal menjelaskan ansuran bayaran kenderaan, pinjaman perumahan dan hutang kad kredit.

Selain itu, semasa melaksanakan pelan kewangan, seseorang harus memastikan aliran tunai bulanan harus sentiasa positif, iaitu pendapatan melebihi perbelanjaan. Aliran tunai bulanan negatif (defisit) menunjukkan perbelanjaan melebihi pendapatan. Jika wujud aliran tunai bulanan negatif, anda harus mengambil tindakan yang cepat bagi mengubah corak perbelanjaan. Sekiranya masalah ini tidak diatasi, maka hal ini boleh menyebabkan seseorang itu gagal mencapai matlamat kewangan dalam tempoh masa yang ditetapkan.

Contoh 4

Puan Aminah ingin membeli kereta yang berharga RM50 000 dalam masa setahun. Beliau bercadang hendak membayar wang pendahuluan sebanyak RM7 500 daripada simpanan beliau. Sebelum ini, Puan Aminah tidak mempunyai simpanan. Puan Aminah ingin membuat pinjaman kenderaan daripada bank.

Bank X telah menawarkan beberapa pilihan. Setelah meneliti kedudukan kewangan, Puan Aminah telah memilih tempoh tujuh tahun kerana beliau hanya mampu membayar ansuran bulanan untuk tempoh itu.

Pelan kewangan keluarga Puan Aminah

	(RM)	
Gaji suami Aminah Gaji Aminah (*Gaji bersih setelah ditolak potongan wajib*)	3 500 3 000	
Pendapatan pasif	0	
Jumlah pendapatan bulanan	6 500	
Tolak simpanan tetap bulanan (*10% daripada pendapatan bulanan*)	650	
Tolak simpanan untuk dana kecemasan	100	
Baki pendapatan		5 750
Tolak perbelanjaan tetap bulanan Pinjaman rumah Ansuran kereta suami Premium insurans	 1 500 600 400	
Jumlah perbelanjaan tetap bulanan		2 500
Tolak jumlah perbelanjaan tidak tetap bulanan Taska Keperluan anak-anak Utiliti rumah Belanja petrol Bayaran tol Barangan dapur Pemberian kepada ibu bapa	 400 450 400 380 100 1 000 400	
Jumlah perbelanjaan tidak tetap		3 130
Pendapatan lebihan		120

Baki pendapatan – Jumlah perbelanjaan tetap bulanan – Jumlah perbelanjaan tidak tetap bulanan.

10 % daripada pendapatan harus disimpan sebagai simpanan sebelum berbelanja.

Pelan kewangan keluarga Puan Aminah dan aliran tunai sebenar

	Pelan Kewangan (RM)	Aliran Tunai Sebenar (RM)
Gaji suami Aminah Gaji Aminah (*Gaji bersih setelah ditolak potongan wajib*)	3 500 3 000	3 500 3 000
Pendapatan pasif	0	0
Jumlah pendapatan bulanan	6 500	6 500
Tolak simpanan tetap bulanan (*10% daripada pendapatan bulanan*) Tolak simpanan untuk dana kecemasan	650 100	650 100
Baki pendapatan	5 750	5 750
Tolak perbelanjaan tetap bulanan Pinjaman rumah Ansuran kereta suami Premium insurans	 1 500 600 400	 1 500 600 400
Jumlah perbelanjaan tetap bulanan	2 500	2 500
Tolak jumlah perbelanjaan tidak tetap bulanan Taska Keperluan anak-anak Utiliti rumah Belanja petrol Bayaran tol Barangan dapur Pemberian kepada ibu bapa	 400 450 400 380 100 1 000 400	 400 450 400 380 100 900 400
Jumlah perbelanjaan tidak tetap	3 130	3 030
Pendapatan lebihan	120	220

Berdasarkan pelan kewangan Puan Aminah, perbelanjaan barangan dapur dapat dikurangkan sebanyak RM100 semasa melaksanakan pelan kewangan. Sikap jimat cermat Puan Aminah membawa penurunan pada perbelanjaan dapur.

Aliran tunai positif merupakan simpanan tambahan.

(a) Berdasarkan perancangan kewangan keluarga Puan Aminah, bolehkah matlamat kewangan Puan Aminah dicapai?

(b) Adakah Puan Aminah seseorang yang bijak mengurus kewangan? Berikan justifikasi anda.

(c) Adakah Puan Aminah menggunakan pendekatan SMART untuk mencapai matlamat kewangan beliau? Berikan justifikasi anda.

ZON INTERAKTIF

Apakah tindakan yang sepatutnya diambil oleh Puan Aminah jika aliran tunai adalah negatif? Bincangkan.

Penyelesaian:

(a) Puan Aminah boleh mencapai matlamat kewangan jangka pendek, iaitu membeli kereta dengan jumlah wang pendahuluan sebanyak RM7 500.

Simpanan bulanan RM650 × 12 (bulan) = RM7 800

Beliau masih mempunyai lebihan RM300 daripada keperluannya sebanyak RM7 500. Beliau juga mempunyai lebihan RM220 setiap bulan untuk menghadapi situasi kecemasan ataupun perbelanjaan di luar jangkaan.

(b) Beliau seorang yang bijak mengurus kewangan, kerana beliau berbelanja untuk keperluan asas. Beliau juga mempunyai simpanan bulanan, dan beliau juga mengutamakan perlindungan, iaitu membeli insurans dan tidak mempunyai hutang seperti hutang kad kredit.

(c) Puan Aminah menggunakan pendekatan SMART untuk mencapai matlamat kewangan iaitu:

- *Specific* – Membeli kereta yang berharga RM50 000
- *Measurable* – Membayar wang pendahuluan sebanyak RM7 500
- *Attainable* – Wang pendahuluan yang boleh dicapai sebanyak RM7 500 (Dalam masa setahun)
- *Realistic* – Simpanan bulanan sebanyak RM650 daripada jumlah pendapatan RM6 500 adalah sebanyak 10% sahaja.
- *Time-bound* – Dalam tempoh 1 tahun.

Mengkaji semula dan menyemak kemajuan

Kelebihan yang diperoleh melalui mengkaji semula dan menyemak kemajuan pelan kewangan dari semasa ke semasa adalah untuk memastikan aliran tunai sentiasa positif. Hal ini secara tidak langsung, membantu mencapai matlamat kewangan seperti yang dirancang. Anda juga harus bersedia mengubah matlamat kewangan jika matlamat itu tidak realistik untuk pendapatan bulanan anda.

Contoh 5

Suami Puan Aminah dinaikkan pangkat pada hujung bulan Jun 2019 dengan kenaikan gaji sebanyak 10%. Jumlah perbelanjaan lain mereka adalah tetap. Apakah kesan kenaikan gaji suami Puan Aminah kepada matlamat kewangan Puan Aminah? Contoh 4 dirujuk.

Penyelesaian:

$$\text{Kenaikan gaji suami Puan Aminah} = \frac{10}{100} \times \text{RM3 500}$$
$$= \text{RM350}$$

$$\text{Gaji baharu suami Puan Aminah} = \text{RM3 500} + \text{RM350}$$
$$= \text{RM3 850}$$

Apabila gaji suami Puan Aminah meningkat sebanyak 10% maka jumlah wang simpanan bank boleh ditambah. Hal ini membantu pembelian kereta dalam jangka masa yang lebih singkat daripada setahun seperti yang dirancang, memandangkan perbelanjaan lain adalah tetap.

TIP

Pelan kewangan perlu dikaji dari semasa ke semasa. Jika anda tidak mengatur strategi kewangan mengikut keadaan semasa, maka sukar untuk mencapai matlamat kewangan seperti yang dirancang.

Praktis Kendiri 10.1a

1. Apakah yang dimaksudkan dengan pengurusan kewangan?

2. Jelaskan proses pengurusan kewangan.

3. Apakah kepentingan menetapkan matlamat kewangan?

4. Bezakan matlamat kewangan jangka pendek dengan jangka panjang.

Soalan **5** berdasarkan pernyataan di bawah.

Antara tiga individu berikut, siapakah yang mematuhi konsep SMART? Berikan justisifikasi anda.

Puan Salmah ingin membeli sebuah komputer riba yang bernilai RM3 000 sebagai hadiah bagi hari jadi anaknya. Oleh itu beliau telah bercadang untuk menyimpan RM300 sebulan bagi sepuluh bulan.

Cik Tamarai seorang guru yang berpendapatan RM3 000 ingin mendirikan rumah tangga dalam masa dua tahun. Anggaran perbelanjaan perkahwinan berjumlah RM30 000. Oleh itu, beliau ingin menyimpan sebanyak RM1 000 sebulan bagi jangka masa dua tahun. Selain itu, beliau juga ingin membuat pinjaman untuk perbelanjaan perkahwinan.

Encik Brian Lee ingin membeli sebuah rumah berharga RM200 000 jika beliau mempunyai jumlah duit yang mencukupi.

Bagaimanakah anda menilai kebolehlaksanaan pelan kewangan jangka pendek dan jangka panjang?

Standard Pembelajaran

Membina dan membentang pelan kewangan peribadi untuk mencapai matlamat kewangan jangka pendek dan jangka panjang, dan seterusnya menilai kebolehlaksanaan pelan kewangan tersebut.

Pelan kewangan yang dibina oleh seseorang individu bertujuan untuk mencapai matlamat kewangan jangka pendek dan jangka panjang. Untuk membina pelan kewangan, seseorang individu harus mengenal pasti sumber-sumber pendapatan yang diperoleh dan perbelanjaannya.

Pelan kewangan yang cekap seharusnya mendahulukan simpanan sebanyak 10% daripada jumlah pendapatan sebelum melibatkan perbelanjaan tetap dan perbelanjaan tidak tetap. Di samping itu, pelan kewangan yang dibina harus mengutamakan pembayaran perbelanjaan tetap seperti ansuran bulanan kereta, rumah dan baki kad kredit.

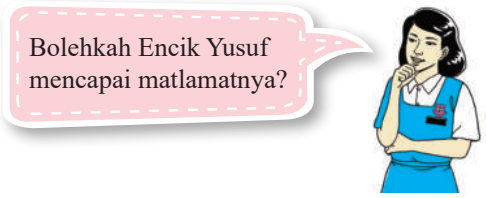
Jika wujud aliran tunai negatif, seseorang harus membetulkan pelan kewangan dengan mengurangkan perbelanjaan tidak tetap. Pada masa yang sama, seseorang boleh menambah sumber pendapatan mengikut kemahiran setiap individu agar perbelanjaan tetap tidak terjejas.

Maklumat di bawah berkaitan dengan aras pendapatan dan perbelanjaan Encik Yusuf untuk bulan Disember 2019. Encik Yusuf bekerja sebagai ejen insurans manakala isterinya seorang suri rumah. Mereka mempunyai tiga orang anak yang masih belajar.

Pelan kewangan Encik Yusuf

	(RM)	
Gaji Encik Yusuf (*Gaji bersih setelah ditolak potongan wajib*)	5 000	
Pendapatan pasif	0	
Jumlah pendapatan bulanan	5 000	
Tolak simpanan tetap bulanan (*10% daripada pendapatan bulanan*)	0	
Tolak simpanan untuk dana kecemasan	200	
Baki pendapatan		4 800
Tolak perbelanjaan tetap bulanan Ansuran Pinjaman Perumahan Premium Insurans	 1 000 500	
Jumlah perbelanjaan tetap bulanan		1 500
Tolak jumlah perbelanjaan tidak tetap bulanan Makanan dan minuman Pendidikan anak-anak Belanja petrol Bil telefon Bil utiliti Melancong	 900 600 420 480 500 400	
Jumlah perbelanjaan tidak tetap		3 300
Pendapatan lebihan / Kurangan		0

Encik Yusuf ingin membeli komputer yang berjenama *Fast* bernilai RM6 000 bagi urusan jualan insurans, dalam masa setahun.



Penyelesaian:

Baki pendapatan – Jumlah perbelanjaan
= RM4 800 – RM4 800
= RM0

Berdasarkan pelan kewangan, Encik Yusuf tidak mempunyai simpanan untuk mencapai matlamat kewangan jangka pendek. Oleh itu, sukar bagi Encik Yusuf mencapai matlamatnya. Anda dikehendaki membantu Encik Yusuf menyelesaikan masalah kewangan tanpa menggunakan dana kecemasan.

(a) Adakah Encik Yusuf menguruskan kewangan dengan cekap?

(b) Berapakah simpanan bulanan yang harus disimpan oleh Encik Yusuf bagi mencapai matlamatnya?

(c) Bagaimanakah pendapatan tambahan boleh diperoleh bagi menambahkan jumlah pendapatannya?

(d) Anda dikehendaki mewujudkan pelan kewangan baharu berdasarkan konsep SMART.

Penyelesaian:

(a) Beliau tidak menguruskan kewangan dengan cekap kerana wujud perbelanjaan-perbelanjaan yang boleh dikurangkan seperti perbelanjaan telefon, makan dan minuman serta tidak ada pelaburan untuk masa depan.

(b) Simpanan bulanan yang diperlukan untuk mencapai matlamat.

$$\text{Simpanan bulanan} = \frac{\text{RM6 000}}{12}$$

$$= \text{RM500}$$

(c) Encik Yusuf boleh menambah pendapatan dengan menjual lebih banyak produk insurans dan memperkenalkan ejen-ejen baharu.

(d) Konsep SMART dalam pelan kewangan yang baharu.

Specific [Khusus] - Membeli Komputer

Measurable [Boleh diukur] - Bernilai RM6 000 memerlukan simpanan bulanan RM500 untuk mencapai matlamat.

Attainable [Boleh dicapai] - Boleh mencapai simpanan bulanan sebanyak RM500 daripada jumlah pendapatan RM5 000.

Realistic [Bersifat realistik] - RM500 daripada jumlah pendapatan sebanyak RM5 000 hanya merupakan 10% daripada pendapatan.

Time-bound [Tempoh masa] - Setahun adalah cukup untuk mengumpulkan RM6 000 dengan simpanan bulanan sebanyak RM500.

Pelan kewangan baharu Encik Yusuf setelah mengambil kira beberapa langkah dari segi perbelanjaan tidak tetap.

Pelan kewangan baharu Encik Yusuf

	(RM)	
Gaji Encik Yusuf (*Gaji bersih setelah ditolak potongan wajib*)	5 000	
Pendapatan pasif	0	
Jumlah pendapatan bulanan	5 000	
Tolak simpanan tetap bulanan (*10% daripada pendapatan bulanan*)	500	
Tolak simpanan untuk dana kecemasan	200	
Baki pendapatan		4 300
Tolak perbelanjaan tetap bulanan Ansuran pinjaman rumah Premium insurans	 1 000 500	
Jumlah perbelanjaan tetap bulanan		1 500
Tolak jumlah perbelanjaan tidak tetap bulanan Makanan dan minuman Pendidikan anak-anak Belanja petrol Bil telefon Bil utiliti Melancong **Pelaburan** Pelaburan Amanah saham	 900 600 300 300 350 200 150	
Jumlah pendapatan tidak tetap		2 800
Pendapatan lebihan	0	0

Perbelanjaan-perbelanjaan ini boleh dikurangkan jika mengamalkan sikap jimat cermat

Simpanan Encik Yusuf RM500 sebulan boleh membantu Encik Yusuf mengumpul sebanyak RM6 000 pada hujung tahun 2020 bagi mencapai matlamat jangka pendek.

Menilai Kebolehlaksanaan pelan kewangan Encik Yusuf

Setiap perancangan kewangan harus dinilai dari semasa ke semasa disebabkan beberapa faktor. Antara faktor yang perlu diberi tumpuan oleh Encik Yusuf adalah seperti kadar inflasi semasa yang boleh menyebabkan kos taraf hidup meningkat. Hal ini secara tidak langsung boleh meningkatkan jumlah perbelanjaan. Jika keadaan ini berlaku Encik Yusuf patut mengambil langkah menambahkan pendapatan. Namun pelan kewangan Encik Yusuf boleh mencapai matlamat kerana beliau telah mengambil langkah berjaga-jaga untuk melabur dalam Amanah Saham. Jumlah perbelanjaan tambahan boleh diatasi dengan dividen yang diterima.

Pelan Kewangan Jangka Panjang

Pelan kewangan jangka panjang penting seperti pelan kewangan jangka pendek. Tujuan pelan kewangan jangka panjang adalah bagi mencapai matlamat seperti yang dirancang pada peringkat awal. Pelan kewangan jangka panjang merupakan pelan kewangan yang melebihi lima tahun seperti pendidikan untuk anak, persaraan dan pembelian rumah. Untuk membina pelan kewangan jangka panjang, aspek utama yang perlu diambil kira adalah seperti yang berikut:

- kadar inflasi
- kadar faedah
- kesihatan diri

ZON INFORMASI

Kadar inflasi ialah keadaan ekonomi yang mengalami kenaikan dalam tingkat harga umum secara berterusan dan tidak terhad.

Semasa membina pelan kewangan jangka panjang, adalah lebih baik jika kita mulakan tabungan lebih awal kerana amalan ini selamat dan dapat membantu kita mencapai matlamat kewangan dengan cepat. Contohnya sebagai persediaan untuk persaraan.

Pelan kewangan jangka panjang yang dibina berbeza bagi setiap individu. Pendapatan seseorang individu ataupun gabungan pendapatan suami dan isteri membolehkan seseorang individu menyimpan simpanan bulanan yang mencukupi dalam tempoh masa yang lebih pendek.

ZON INTERAKTIF

Bincangkan aspek-aspek lain yang perlu diambil kira untuk membina pelan kewangan jangka panjang.

Contoh 6

Encik Syed dan isterinya ingin membeli sebuah rumah dalam masa enam tahun selepas mereka berkahwin. Jumlah pendapatan mereka berdua ialah RM8 000 dan jumlah perbelanjaan tetap dan tidak tetap adalah RM6 500. Mereka bercadang membeli sebuah rumah dua tingkat yang berharga RM720 000 dengan wang pendahuluan sebanyak RM72 000.

(a) Berapakah simpanan bulanan yang harus disimpan oleh Encik Syed dan isterinya bagi mencapai matlamat tersebut?

(b) Adakah Encik Syed bijaksana dari segi pembelian rumah yang berharga RM720 000? Berikan justifikasi anda.

Penyelesaian:

(a) Simpanan tahunan yang diperlukan oleh Encik Syed $= \frac{\text{RM72 000}}{\text{6 tahun}}$

$= \text{RM12 000}$

Simpanan bulanan yang diperlukan oleh Encik Syed $= \frac{\text{RM12 000}}{\text{12 bulan}}$

$= \text{RM1 000}$

Bagi keluarga Encik Syed, jumlah simpanan bulanan sebanyak RM1 000 sebulan bagi mencapai matlamat jangka panjang tidak sukar memandangkan jumlah pendapatan sebanyak RM8 000.

(b) Tidak. Walaupun Encik Syed boleh membayar wang pendahuluan RM72 000 namun ansuran bulanan rumah yang perlu dibayar membebankan beliau kerana jumlah perbelanjaan adalah tinggi.

Kajian Kes

Andaikan diri anda ialah perunding kewangan. Encik Wong selaku ketua keluarga yang mengamalkan aras pendapatan dan perbelanjaan bulanan seperti yang ditunjukkan di bawah telah datang berjumpa dengan anda untuk membina pelan kewangan bagi membeli rumah.

Pelan kewangan Encik Wong

	(RM)	
Gaji Encik Wong (*Gaji bersih setelah ditolak potongan wajib*)	6 500	
Pendapatan pasif (sewa bulanan)	500	
Jumlah pendapatan bulanan	7 000	
Tolak simpanan tetap bulanan (*10% daripada pendapatan bulanan*)	650	
Tolak simpanan untuk dana kecemasan	100	
Baki pendapatan	6 250	6 250
Tolak perbelanjaan tetap bulanan Ansuran pinjaman rumah Ansurans kereta Premium insurans	 1 500 800 600	
Jumlah perbelanjaan tetap bulanan		2 900
Tolak jumlah perbelanjaan tidak tetap bulanan Perbelanjaan dapur Melancong Utiliti rumah Bil telefon Belanja petrol Gimnasium	 1 300 500 350 300 800 100	
Jumlah perbelanjaan tidak tetap		3 350
Pendapatan lebihan	0	0

Encik Wong bekerja sebagai seorang pegawai pemasaran di sebuah syarikat manakala isterinya seorang suri rumah tangga dan mempunyai dua orang anak yang berumur satu dan dua tahun. Encik Wong ingin menyimpan wang untuk pendidikan anak-anak sebanyak RM150 000 dalam masa 15 tahun dari sekarang. Anda sebagai perunding kewangan membantu Encik Wong untuk membina pelan kewangan yang boleh mencapai matlamat kewangan Encik Wong.

Penyelesaian:

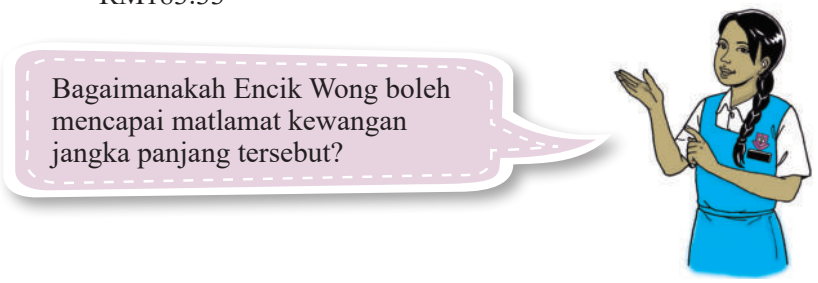
$$\text{Simpanan tahunan} = \frac{\text{RM150 000}}{\text{15 tahun}}$$

$$= \text{RM10 000}$$

$$\text{Simpanan bulanan} = \frac{\text{RM10 000}}{\text{12 bulan}}$$

$$= \text{RM833.33}$$

Tambahan simpanan yang diperlukan = RM833.33 – RM650
= RM183.33



Cadangan:

Encik Wong perlu menambah jumlah simpanan sebanyak RM183.33 bagi setiap bulan.

1. Beliau boleh mengurangkan perbelanjaan bagi tujuan melancong sebanyak 25% demi mencapai matlamat kewangan untuk menyimpan wang bagi tujuan pendidikan anak-anak.

$$\text{Jumlah pengurangan perbelanjaan melancong} = \frac{25}{100} \times \text{RM500}$$
$$= \text{RM125}$$

$$\text{Jumlah perbelanjaan bulanan baharu melancong} = \text{RM500} - \text{RM125}$$
$$= \text{RM375}$$

2. Beliau juga boleh mengurangkan perbelanjaan ke atas petrol sebanyak RM100 dengan berkongsi kereta dengan rakan sekerja. Dengan mengamalkan kedua-dua langkah di atas boleh menambah jumlah simpanan sebanyak

= RM125 + RM100
= RM225

3. Encik Wong juga boleh menggunakan langkah-langkah lain dalam mengurangkan perbelanjaan tidak tetap bagi mencapai matlamat kewangan. Selain itu Encik Wong juga boleh menambahkan pendapatan dengan melakukan kerja-kerja sampingan yang lain untuk menjanakan pendapatan tambahan. Encik Wong juga boleh melabur dengan menggunakan jumlah wang yang dikumpulkan pada setiap tahun supaya memperoleh pendapatan pasif, iaitu dividen dan faedah sebagai tambahan kepada jumlah pendapatan.

Pelan kewangan yang baharu setelah mengambil kira cadangan-cadangan tersebut.

Pelan kewangan baharu Encik Wong

	(RM)	
Gaji Encik Wong (*Gaji bersih setelah ditolak potongan wajib*)	6 500	
Pendapatan pasif sewa bulanan	500	
Jumlah pendapatan bulanan	7 000	
Tolak simpanan tetap bulanan (*10% daripada pendapatan bulanan*)	650	
Tolak simpanan untuk dana kecemasan	100	
Baki pendapatan		6 250
Tolak perbelanjaan tetap bulanan Pinjaman rumah Ansuran kereta Premium insurans	 1 500 800 600	
Jumlah perbelanjaan tetap bulanan		2 900
Tolak jumlah perbelanjaan tidak tetap bulanan Perbelanjaan dapur Melancong Utiliti rumah Bill telefon Belanja Petrol Gimnasium	 1 300 375 350 300 700 100	
Jumlah perbelanjaan tidak tetap		3 125
Pendapatan lebihan		225

Simpanan tambahan

Jumlah simpanan bagi 1 bulan = Simpanan bulanan + Simpanan tambahan
= RM650 + 225
= RM875

Jumlah simpanan bagi 15 tahun = RM875 × 12 × 15 tahun
= RM157 500

Pada hakikat sebenar, jumlah wang yang dikumpulkan adalah lebih daripada RM157 500 kerana simpanan tahunan di bank menawarkan faedah.

Kebolehlaksanan pelan kewangan Encik Wong bergantung pada beberapa faktor berikut:

1. Kadar inflasi harus tidak melebihi kenaikan gaji.
2. Sewa rumah yang diterima adalah tetap.
3. Encik Wong sihat dan boleh meneruskan pekerjaan.
4. Peningkatan dalam perbelanjaan boleh diatasi dengan peningkatan gaji, sewa dan pekerjaan sambilan.
5. Tidak ada perkara di luar jangkaan berlaku bagi keluarga Encik Wong yang melibatkan kos yang tinggi.

Praktis Kendiri 10.1b

1. Apakah faktor-faktor yang boleh mempengaruhi pelan kewangan jangka masa panjang?

2. Maklumat di bawah berkaitan dengan aras perancangan kewangan Puan Thong.

Pelan Kewangan	**(RM)**
Gaji bersih Puan Thong	6 000
Bajet Perbelanjaan	
Pinjaman rumah/apartmen, termasuk penyelenggaraan	500
Ansuran kereta	700
Melancong	500
Sewa	1 500
Tambang	900
Bil-bil utiliti	250
Bayaran tol	100
Perbelanjaan dapur	400
Pemberian kepada ibu bapa	600
Simpanan	100
Insurans	200
Jumlah perbelanjaan	5 750
Baki pendapatan Puan Thong	250

(a) Adakah Puan Thong mengamalkan perbelanjaan secara berhemat?

(b) Adakah Puan Thong boleh mencapai matlamat kewangan jangka panjang jika beliau ingin membeli harta tanah yang bernilai RM500 000 dalam jangka masa 6 tahun dengan corak perbelanjaan sedemikian?

Praktis Komprehensif

1. Mengapakah semakin banyak golongan muda di Malaysia diisytiharkan muflis?

2. Apakah kesan jika aliran tunai masuk kurang daripada aliran tunai keluar?

3. Apakah tujuan mewujudkan pelan kewangan?

4. Berikan dua kelebihan mengkaji semula dan menyemak kemajuan pelan kewangan.

5. Huraikan dua faktor yang boleh menyebabkan pelan kewangan sukar dilaksanakan.

6. Mengapakah kita harus mengkaji semula dan menyemak kemajuan pelan kewangan?

7. "Lebih awal kita mulakan tabungan lebih selamat" untuk mencapai matlamat kewangan kita. Jelaskan.

8. Encik Nabil bekerja sebagai seorang jurutera di sebuah kilang dengan gaji bersih bulanan RM3 800. Beliau juga menjadi ejen jualan produk X sebagai kerja sampingan. Komisen bulanan yang diperoleh dianggarkan sebanyak RM450. Hasil sewa rumah kedua ialah RM600 sebulan. Anggaran perbelanjaan bulanan adalah seperti yang berikut.

Perbelanjaan Bulanan	RM
Bayaran ansuran pinjaman rumah (1)	800
Bayaran ansuran pinjaman rumah (2)	500
Perbelanjaan makanan	900
Bayaran utiliti	150
Belanja tol dan petrol	200
Langganan perkhidmatan Internet	100
Makan di restoran mewah	400
Perbelanjaan insurans	350

Encik Nabil menetapkan 10% daripada gajinya sebagai simpanan tetap bulanan untuk mencapai matlamat kewangannya.

(a) Anda dikehendaki menyediakan satu pelan kewangan peribadi bulanan untuk Encik Nabil.

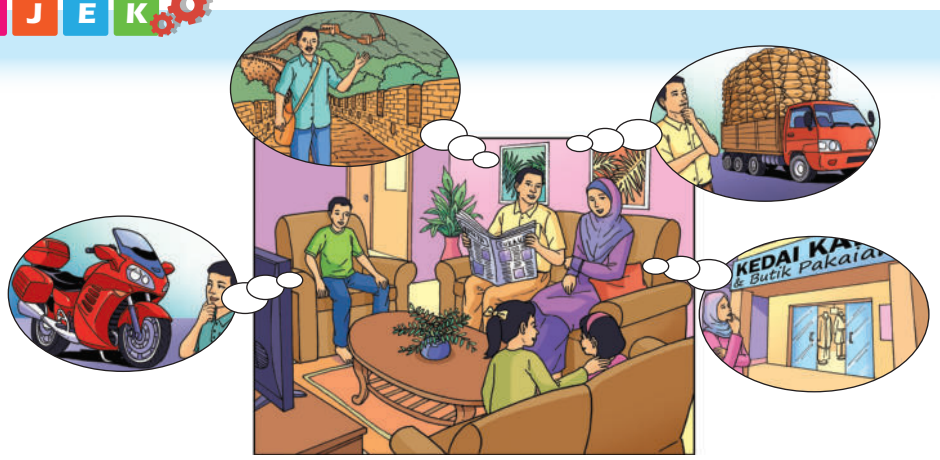
(b) Kemukakan komen tentang lebihan atau kurangan yang akan dialami oleh Encik Nabil berdasarkan pelan kewangan ini.

9. Apakah kesan jika aliran tunai ialah

(a) aliran tunai positif

(b) aliran tunai negatif

PROJEK



Bayangkan ilustrasi di atas menunjukkan matlamat kewangan setiap ahli keluarga anda. Cuba bantu mereka dengan membina pelan kewangan jangka pendek dan jangka panjang berpandukan konsep pendekatan SMART. Anda juga harus mendapatkan maklumat tentang pendapatan serta perbelanjaan yang wujud dalam keluarga anda. Pada masa kelak, anda juga boleh bertindak sebagai perunding kewangan untuk keluarga anda.

PETA KONSEP

Perancangan dan Pengurusan Kewangan

- Proses Pengurusan Kewangan
  - Menetapkan matlamat
  - Menilai kedudukan kewangan
  - Mewujudkan pelan kewangan
  - Melaksanakan pelan kewangan
  - Mengkaji semula dan menyemak kemajuan
- Pelan Kewangan Peribadi
  - Aliran tunai masuk
  - Aliran tunai keluar
  - Lebihan/Kurangan
  - Matlamat kewangan
    - Jangka pendek
    - Jangka panjang
  - Menilai kebolehlaksanaan pelan kewangan
- Konsep SMART
  - *S* ⇨ *Specific*
  - *M* ⇨ *Measurable*
  - *A* ⇨ *Attainable*
  - *R* ⇨ *Realistic*
  - *T* ⇨ *Time-bound*

Refleksi Kendiri

Lengkapkan ruang di bawah dengan jawapan yang sesuai mengikut pernyataan yang diberikan.

Proses pengurusan kewangan terdiri daripada:

(a) _____

(b) _____

(c) _____

(d) _____

(e) _____

Matlamat kewangan berasaskan konsep SMART.

(a) _____

(b) _____

(c) _____

(d) _____

(e) _____

Ciri-ciri pelan kewangan peribadi jangka pendek.

(a) _____

(b) _____

(c) _____

Ciri-ciri pelan kewangan peribadi jangka panjang.

(a) _____

(b) _____

(c) _____

(d) _____

Eksplorasi Matematik

Bayangkan diri anda diundang untuk memberikan ceramah yang bertajuk 'CELIK PENGURUSAN KEWANGAN' kepada golongan remaja di sebuah institusi pendidikan.

Arahan:

1. Bahagikan murid kepada kumpulan yang sesuai.
2. Ucapan ceramah anda mesti mengandungi isi-isi berikut:
   (a) Kepentingan pengurusan kewangan
   (b) Cara mewujudkan pelan kewangan
   (c) Matlamat jangka pendek dan jangka panjang
   (d) Contoh bajet peribadi untuk golongan dewasa
3. Hasil kerja anda boleh dipersembahkan dalam bentuk multimedia di bilik komputer. Teks ucapan anda boleh juga dipamerkan di Sudut Matematik kelas anda.

Jawapan

BAB 1 Fungsi dan Persamaan Kuadratik dalam Satu Pemboleh Ubah

Praktis Kendiri 1.1a

1. (a) Ya
(b) Bukan kerana terdapat kuasa bukan nombor bulat
(c) Bukan kerana terdapat dua pemboleh ubah x dan y
(d) Ya
(e) Bukan kerana kuasa tertinggi adalah kuasa tiga
(f) Bukan kerana terdapat kuasa bukan nombor bulat
(g) Bukan kerana terdapat kuasa bukan nombor bulat.
(h) Ya
(i) Ya

2. (a) $a = 2$, $b = -5$, $c = 1$
(b) $a = 1$, $b = -2$, $c = 0$
(c) $a = 2$, $b = 0$, $c = 1$
(d) $a = -\frac{1}{2}$, $b = 4$, $c = 0$
(e) $a = -2$, $b = -1$, $c = 1$
(f) $a = 4$, $b = 0$, $c = 0$
(g) $a = 1$, $b = \frac{3}{2}$, $c = -4$
(h) $a = \frac{1}{3}$, $b = 0$, $c = -2$
(i) $a = 2$, $b = -6$, $c = 0$

Praktis Kendiri 1.1b

1. (a) ∪ (b) ∩

2. (a) $a > 0$, titik minimum
(b) $a < 0$, titik maksimum

3. (a) Titik minimum $(4, -15)$, $x = 4$
(b) Titik maksimum $(3, 13.5)$, $x = 3$
(c) Titik maksimum $(-2, 4)$, $x = -2$
(d) Titik minimum $(2, -2)$, $x = 2$

Praktis Kendiri 1.1c

1. (a) 5 (b) –3 (c) 4

2. $0 < p < 4$
Fungsi $f(x)$ lebih besar bukaan, maka $p < 4$.
Bagi graf berbentuk ∪, $a < 0$, maka $p > 0$

3. (a) $k = -1$
(b) $h = 5$
(c) $f(x) = x^2 - 6x - 5$

Praktis Kendiri 1.1d

1. (a) $L = x^2 + 25x + 100$ (b) $x^2 + 25x - 150 = 0$

2. $p^2 + 4p - 48 = 0$

Praktis Kendiri 1.1e

1. (a) $x = -0.35$, $x = 2$
(b) $x = -4$, $x = 5$

2. (a) $x = 3$ ialah punca, $x = 2$ ialah punca
(b) $x = 1$ ialah punca, $x = \frac{1}{2}$ bukan punca
(c) $x = -\frac{1}{3}$ ialah punca, $x = -2$ bukan punca
(d) $x = 2$ bukan punca, $x = \frac{2}{3}$ ialah punca

3. (a) $x = -4$ dan $x = 1$ ialah punca, $x = 2$ bukan punca
(b) $x = 3$ dan $x = 5$ ialah punca, $x = -3$ bukan punca
(c) $x = -2$ dan $x = 4$ ialah punca, $x = 2$ bukan punca

4. (a) $x = 1$ bukan punca (b) $x = -3$ ialah punca
(c) $x = 15$ bukan punca (d) $x = 5$ ialah punca

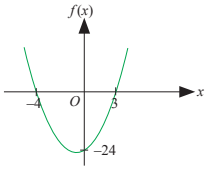
Praktis Kendiri 1.1f

1. (a) $x = 5, x = -2$ (b) $x = 2, x = 8$
(c) $x = \frac{2}{3}, x = 1$ (d) $x = -6, x = 2$
(e) $x = -3, x = \frac{3}{2}$ (f) $x = -\frac{5}{4}, x = 2$
(g) $x = -\frac{7}{3}, x = 2$ (h) $x = 0, x = 5$
(i) $x = -2, x = 2$

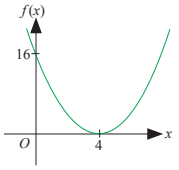
2. (a) $m^2 + 2m - 3 = 0$; $m = -3$, $m = 1$
(b) $2p^2 - 11p + 5 = 0$; $p = \frac{1}{2}$, $p = 5$
(c) $y^2 + 2y - 24 = 0$; $y = 4$, $y = -6$
(d) $a^2 - 6a + 5 = 0$; $a = 5$, $a = 1$
(e) $k^2 + 2k - 8 = 0$; $k = 2$, $k = -4$
(f) $2h^2 - 7h + 6 = 0$; $h = 2$, $h = \frac{3}{2}$
(g) $h^2 - 3h - 10 = 0$; $h = -2$, $h = 5$
(h) $4x^2 - 7x + 3 = 0$; $x = \frac{3}{4}$, $x = 1$
(i) $r^2 - 6r + 9 = 0$; $r = 3$

Praktis Kendiri 1.1g

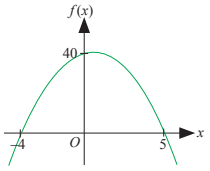
1. (a)



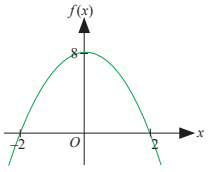
(b)



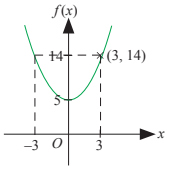
(c)



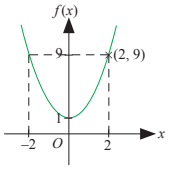
(d)



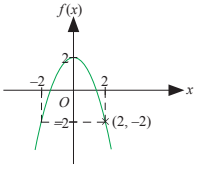
2. (a)



(b)



(c)



Praktis Kendiri 1.1h

1. (a) $L = 5x^2 + 20x$ (b) RM8 000
2. Ya

Praktis Komprehensif

1. (a) Ya (b) Ya
(c) Bukan (d) Bukan
(e) Ya (f) Ya
2. (a) $x = 2$ (b) $x = 3$
3. (a) $x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}$
(b) $x = -9, x = 9$
(c) $y = 0, y = 4$
(d) $x = -1, x = -2$
(e) $x = -2, x = \frac{5}{2}$
(f) $x = 6, x = -2$
(g) $m = 1, m = -4$
(h) $p = 4, p = \frac{5}{2}$
(i) $k = 7, k = -2$
(j) $h = 2, h = -2$
(k) $x = 5, x = \frac{3}{2}$
4. $p = 7$
5. $m = 6, m = 4$
6. $(3, -4)$
7. $(4, 23)$
8. (a) $A\,(0, -5)$
(b) $x = 3$
(c) $B\,(6, -5)$
(d) $(3, 4)$
9. (a) $c = 6$ (b) $m = -2$
(c) $a = 2$ (d) $n = -2$
10. (a) $h = 1$ (b) $k = 5$
(c) $a = 3$ (d) $x = 3$
(e) $P(3, -12)$
11. (a) $L = x^2 - 3x - 4$
(b) panjang = 8 cm, lebar = 3 cm
12. 20 cm
13. (a) $L = x^2 + 27x + 180$ (b) $x = 8$
(c) cukup
14. (a) $L = x^2 - 5x - 4$ (b) $x = 7$
(c) 38 m

BAB 2 Asas Nombor

Praktis Kendiri 2.1a

1. Terima jawapan murid yang betul.
2. 461, 371, 829
3.

(a)	234
(b)	234, 336
(c)	234, 336, 673
(d)	234, 336, 673, 281

4. (a) 2^4 (b) 5^2 (c) 7^1
(d) 6^1 (e) 3^2 (f) 9^1
(g) 4^2 (h) 8^3 (i) 6^2
(j) 5^0
5. (a) 4 (b) 10 (c) 3
(d) 72 (e) 54 (f) 2 058
(g) 8 (h) 448 (i) 12
(j) 4
6. (a) 15 (b) 277 (c) 53
(d) 278 (e) 193 (f) 15
(g) 38 (h) 655 (i) 191
(j) 43
7. (a) $p = 3, q = 2^2$
(b) $p = 2, q = 7$
(c) $p = 4, q = 3$
8. 651
9. (a) $110_2, 111_2, 1101_2, 1110_2$
(b) $112_4, 132_4, 231_4, 1123_4$
(c) $124_5, 231_5, 241_5, 324_5$
10. (a) $1213_4, 89_9, 111101_2$
(b) $313_5, 73_8, 123_4$
(c) $253_6, 161_7, 222_3$
11. 315

Praktis Kendiri 2.1b

1. (a) 111101110_2 (b) 13232_4 (c) 3434_5
(d) 756_8 (e) 608_9
2. (a) 1022_3 (b) 24_5 (c) 100001001_2
(d) 251_6 (e) 251_8 (f) 10012_4
3. 1010_3
4. (a) 75_8 (b) 16_8 (c) 367_8
(d) 52_8 (e) 70_8 (f) 725_8
5. (a) 100011_2 (b) 1001010_2
(c) 101111_2 (d) 1010001111_2
(e) 110011101_2 (f) 10100011_2

Praktis Kendiri 2.1c

1. (a) 101_2 (b) 111001_2 (c) 1101_3
(d) 1220_3 (e) 23_4 (f) 3110_4
(g) 1103_5 (h) 4002_5 (i) 513_6
(j) 213_6 (k) 452_7 (l) 1113_7
(m) 2020_8 (n) 735_8 (o) 211_9
(p) 6553_9
2. (a) 1101_2 (b) 110_2 (c) 1222_3
(d) 121_3 (e) 10_4 (f) 302_4
(g) 323_5 (h) 1141_5 (i) 3413_6
(j) 1103_6 (k) 5453_7 (l) 6313_7
(m) 746_8 (n) 4201_8 (o) 645_9
(p) 1443_9

Praktis Kendiri 2.1d

1. $x = 55_7$
2. (a) 168 (b) 134_5
3. Puan Amirah
4. 1600 m^2

Praktis Komprehensif

1. (a) 240_5, 241_5, 242_5
(b) 110_2, 111_2, 1000_2
(c) 31_7, 32_7, 33_7
2. 32
3. (a) 716_8 (b) 11110111_2
4. (a) 11110001_2 (b) 1431_5
(c) 463_7 (d) 361_8
5. (a) 10101_2 (b) 442_7 (c) 56_9
6. (a) Benar (b) Benar (c) Palsu
7. 269
8. 39
9. $y = 105$
10. (a) 65_8, 110110_2 (b) 176_8, 1003_5
11. 132_5
12. 55_8
13. 42_7

BAB 3 Penaakulan Logik

Praktis Kendiri 3.1a

1. (a) Bukan Pernyataan kerana ayat itu tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya.
(b) Pernyataan kerana ayat itu benar.
(c) Bukan Pernyataan kerana ayat itu tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya.
(d) Pernyataan kerana ia benar.
(e) Bukan Pernyataan kerana ayat itu tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya.
2. (a) $40 > 23 + 9$ (b) $\{3\} \subset \{3, 6, 9\}$
(c) $\frac{1}{4} \times \frac{10}{3} = \frac{5}{6}$ (d) $x^2 + 3 \leqslant (x + 3)^2$
(e) $\sqrt[3]{27} + 9 = 12$
3. (a) Palsu (b) Palsu (c) Palsu
(d) Benar (e) Benar

Praktis Kendiri 3.1b

1. 819 bukan gandaan 9. Palsu
2. Lelayang tidak mempunyai dua paksi simetri. Benar
3. Kon tidak mempunyai satu muka melengkung. Palsu
4. Dua garis selari tidak mempunyai kecerunan yang sama. Palsu
5. Bukan semua persamaan kuadratik mempunyai 2 punca yang sama. Benar

Praktis Kendiri 3.1c

1. (a) 2 atau 3 ialah faktor perdana nombor 6.
(b) Kon mempunyai satu bucu dan satu satah.
(c) Rombus dan trapezium ialah sisi empat selari.
2. (a) Benar (b) Palsu (c) Palsu (d) Palsu
(e) Benar (f) Benar (g) Palsu (h) Benar

Praktis Kendiri 3.1d

1. (a) Jika $x = 3$, maka $x^4 = 81$.
(b) Jika $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ialah persamaan kubik, maka $a \neq 0$.
(c) Jika $n - 5 > 2n$, maka $n < -5$.
(d) Jika $\frac{m}{n} > 1$, maka $m^2 > n^2$.
2. (a) Antejadian: x ialah nombor genap.
Akibat: x^2 ialah nombor genap.
(b) Antejadian: set $K = \phi$.
Akibat: $n(K) = 0$.
(c) Antejadian: x ialah nombor bulat.
Akibat: $2x$ ialah nombor genap.
(d) Antejadian: Garis lurus AB ialah tangen kepada bulatan P.
Akibat: Garis lurus AB hanya menyentuh bulatan P pada satu titik sahaja.
3. (a) k ialah nombor kuasa dua sempurna jika dan hanya jika $\sqrt{k}$ ialah nombor bulat.
(b) $P \cap Q = P$ jika dan hanya jika $P \subset Q$.
(c) $pq = 1$ jika dan hanya jika $p = q^{-1}$ dan $q = p^{-1}$.
(d) $k^2 = 4$ jika dan hanya jika $(k + 2)(k - 2) = 0$.
4. (a) Jika PQR ialah poligon sekata, maka $PQ = QR = PR$.
Jika $PQ = QR = PR$, maka PQR ialah poligon sekata.
(b) Jika $\frac{m}{n}$ ialah pecahan tidak wajar, maka $m > n$.
Jika $m > n$, maka $\frac{m}{n}$ ialah pecahan tidak wajar.
(c) Jika 9 ialah pintasan-y bagi garis lurus $y = mx + c$, maka $c = 9$.
Jika $c = 9$, maka 9 ialah pintasan-y bagi garis lurus $y = mx + c$.
(d) Jika $f(x) = ax^2 + bx + c$ mempunyai titik maksimum, maka $a < 0$.
Jika $a < 0$, maka $f(x) = ax^2 + bx + c$ mempunyai titik maksimum.

Praktis Kendiri 3.1e

1. (a) Akas: Jika $x > -1$, maka $x + 3 > 2$.
Songsangan: Jika $x + 3 \leqslant 2$, maka $x \leqslant -1$.
Kontrapositif: Jika $x \leqslant -1$, maka $x + 3 \leqslant 2$.
(b) Akas: Jika hasil tambah punca bagi $(k - 3)(k + 4) = 0$ ialah -1, maka $(k - 3)(k + 4) = 0$ mempunyai dua punca berbeza.
Songsangan: Jika $(k - 3)(k + 4) = 0$ tidak mempunyai dua punca berbeza, maka hasil tambah $(k - 3)(k + 4) = 0$ bukan -1.
Kontrapositif: Jika hasil tambah punca bagi $(k - 3)(k + 4) = 0$ bukan -1, maka $(k - 3)(k + 4) = 0$ tidak mempunyai dua punca berbeza.

(c) Akas: Jika AB selari dengan CD, maka $ABCD$ ialah sebuah segi empat selari.
Songsangan: Jika $ABCD$ bukan sebuah segi empat selari, maka AB tidak selari dengan CD.
Kontrapositif: Jika AB tidak selari dengan CD, maka $ABCD$ bukan sebuah segi empat selari.

2. (a)

Implikasi: Jika 2 ialah faktor bagi 10, maka 10 boleh dibahagi tepat dengan 2.	Benar
Akas: Jika 10 boleh dibahagi tepat dengan 2, maka 2 ialah faktor bagi 10.	Benar
Songsangan: Jika 2 bukan faktor bagi 10, maka 10 tidak boleh dibahagi tepat dengan 2.	Benar
Kontrapositif: Jika 10 tidak boleh dibahagi tepat dengan 2, maka 2 bukan faktor bagi 10.	Benar

(b)

Implikasi: Jika 4 ialah punca $x^2 - 16 = 0$, maka 4 bukan punca bagi $(x + 4)(x - 4) = 0$.	Palsu
Akas: Jika 4 bukan punca bagi $(x + 4)(x - 4) = 0$, maka 4 ialah punca bagi $x^2 - 16 = 0$.	Benar
Songsangan: Jika 4 bukan punca bagi $x^2 - 16 = 0$, maka 4 ialah punca bagi $(x + 4)(x - 4) = 0$.	Benar
Kontrapositif: Jika 4 ialah punca bagi $(x + 4)(x - 4) = 0$, maka 4 bukan punca bagi $x^2 - 16 = 0$.	Palsu

(c)

Implikasi: Jika segi empat tepat mempunyai 4 paksi simetri, maka segi empat tepat mempunyai 4 sisi.	Benar
Akas: Jika segi empat tepat mempunyai 4 sisi, maka segi empat tepat mempunyai 4 paksi simetri.	Palsu
Songsangan: Jika segi empat tepat tidak mempunyai 4 paksi simetri, maka segi empat tepat tidak mempunyai 4 sisi.	Palsu
Kontrapositif: Jika segi empat tepat tidak mempunyai 4 sisi, maka segi empat tepat tidak mempunyai 4 paksi simetri.	Benar

(d)

Implikasi: Jika $55 + 55 = 4 \times 5$, maka $666 + 666 = 6 \times 6$	Benar
Akas: Jika $666 + 666 = 6 \times 6$, maka $55 + 55 = 4 \times 5$.	Benar
Songsangan: Jika $55 + 55 \neq 4 \times 5$, maka $666 + 666 \neq 6 \times 6$.	Benar
Kontrapositif: Jika $666 + 666 \neq 6 \times 6$, maka $55 + 55 \neq 4 \times 5$.	Benar

Praktis Kendiri 3.1f

1. (a) Palsu. Segi empat tepat tidak mempunyai empat sisi yang sama panjang.
(b) Benar
(c) Benar
(d) Palsu. 36 tidak boleh dibahagi tepat dengan 14.

2. (a) $100_8 - 77_8 \neq 1_8$. Palsu $100_8 - 77_8 = 1_8$.
(b) Kuboid tidak mempunyai empat keratan rentas seragam. Benar
(c) Jika $y = 2x$ dan $y = 2x–1$ mempunyai kecerunan yang sama, maka $y = 2x$ selari dengan $y = 2x–1$. Benar
(d) Jika segi tiga ABC tidak bersudut tepat di C, maka $c^2 \neq a^2 + b^2$. Benar
(e) Jika $w \geq 5$, maka $w \geq 7$. Palsu. Apabila $w = 6$, $6 > 5$ tetapi $6 < 7$.

Praktis Kendiri 3.2a

1. Hujah deduktif
2. Hujah induktif
3. Hujah induktif
4. Hujah deduktif
5. Hujah deduktif
6. Hujah induktif
7. Hujah induktif
8. Hujah deduktif
9. Hujah deduktif
10. Hujah induktif

Praktis Kendiri 3.2b

1. Sah dan tidak munasabah kerana premis 1 dan kesimpulan tidak benar.
2. Sah dan munasabah
3. Sah dan munasabah
4. Sah tetapi tidak munasabah kerana premis 1 tidak benar.
5. Tidak sah tetapi munasabah kerana tidak mematuhi bentuk deduktif yang sah.
6. Sah dan munasabah.
7. Tidak sah dan tidak munasabah kerana tidak mematuhi bentuk deduktif yang sah. Lelayang juga mempunyai pepenjuru berserenjang tetapi bukan rombus.
8. Sah dan munasabah.
9. Tidak sah dan munasabah kerana tidak mematuhi bentuk deduktif yang sah.
10. Sah dan munasabah.

Praktis Kendiri 3.2c

1. (a) Preevena menggunakan buku teks digital.
(b) Kai Meng mendapat hadiah tunai RM200.
(c) Segi empat $PQRS$ bukan poligon sekata.
(d) ΔABC mempunyai satu paksi simetri.
(e) $m : n = 2 : 3$
(f) $m + 3 > 2m - 9$

2. (a) Garis lurus AB mempunyai kecerunan sifar.
(b) Semua gandaan 9 boleh dibahagi tepat dengan 3.
(c) Poligon P ialah nonagon.
(d) Jika $x > 6$, maka $x > 4$.
(e) Suhu bilik tidak kurang daripada 19°C.
(f) Jika $3x - 8 = 16$, maka $x = 8$.

Praktis Kendiri 3.2d

1. Hujah lemah dan tidak meyakinkan kerana kesimpulan mungkin palsu.
2. Hujah kuat dan meyakinkan.
3. Hujah lemah dan tidak meyakinkan kerana kesimpulan mungkin palsu.

4. Hujah kuat dan meyakinkan.
5. Hujah kuat tetapi tidak meyakinkan kerana premis adalah palsu.
6. Hujah lemah dan tidak meyakinkan kerana kesimpulan mungkin palsu.

Praktis Kendiri 3.2e

1. $(3n)^{-1}$; $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$
2. $\frac{n}{5}$; $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$
3. $2(n)^3 + n$; $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
4. $20 - 4^n$; $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Praktis Kendiri 3.2f

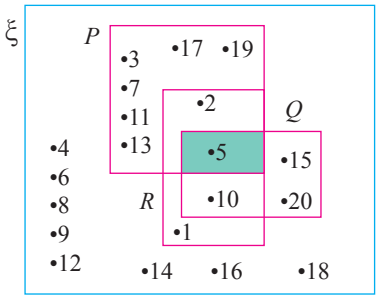
1. RM43
2. (a) 32 500 orang (b) ke-14
3. (a) 536 100 – 15 000n (b) 431 100 bayi
4. (a) $\sin 60° = \frac{y}{z}$ $\sin 40° = \frac{p}{r}$ $\sin 20° = \frac{a}{c}$
   $\cos 30° = \frac{y}{z}$ $\cos 50° = \frac{p}{r}$ $\cos 70° = \frac{a}{c}$
   (b) $\sin\theta = \cos(90° - \theta)$
   (c) 0.9848

Praktis Komprehensif

1. (a) Pernyataan sebab ayat itu benar.
   (b) Bukan pernyataan sebab ayat itu tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya.
   (c) Pernyataan sebab ayat itu palsu.
   (d) Bukan pernyataan sebab ayat itu tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya.
   (e) Bukan pernyataan sebab ayat itu tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya.
   (f) Pernyataan sebab ayat itu benar.
   (g) Bukan pernyataan sebab ayat itu tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya.
   (h) Pernyataan sebab ayat itu benar.
   (i) Pernyataan sebab ayat itu palsu.
2. (a) Benar
   (b) Palsu. –3 ialah integer yang bernilai negatif.
   (c) Palsu. $\frac{3}{2}$ ialah pecahan yang lebih besar daripada satu.
   (d) Palsu. Pepenjuru bagi lelayang bukan pembahagi dua sama serenjang.
3. (a) Palsu (b) Benar (c) Benar (d) Palsu
4. (a) Semua heksagon mempunyai enam bucu.
   (b) Sebilangan bulatan mempunyai jejari 18 cm.
   (c) Sebilangan segi tiga mempunyai tiga paksi simetri
5. (a) (i) Antejadian: $p < q$
   Akibat: $q - p > 0$.
   (ii) Antejadian: Perimeter segi empat tepat A ialah $2(x+y)$.
   Akibat: Luas segi empat tepat A ialah xy.
   (b) (i) x ialah gandaan 10 jika dan hanya jika x ialah gandaan 5.
   (ii) 6 ialah faktor bagi 12 jika dan hanya jika 6 ialah faktor bagi 24.
   (c) (i) Jika 20% daripada 30 ialah 6, maka $0.2 \times 30 = 6$.
   Jika $0.2 \times 30 = 6$, maka 20% daripada 30 ialah 6.
   (ii) Jika M boleh dibahagi tepat dengan 20, maka M boleh dibahagi tepat dengan 2 dan 10.
   Jika M boleh dibahagi tepat dengan 2 dan 10, maka M boleh dibahagi tepat dengan 20.
6. (a) Jika $\alpha + \beta = 90°$, maka α dan β adalah dua sudut pelengkap. Benar
   (b) Jika $w \leqslant 30$, maka $w \leqslant 20$. Palsu sebab $28 < 30$ tetapi $28 > 20$.
   (c) Jika $p \leqslant 0$, maka $p^2 \leqslant 0$. Palsu sebab $-2 < 0$ tetapi $(-2)^2 > 0$.
   (d) Poligon tidak mempunyai jumlah sudut peluaran 360°. Palsu sebab hasil tambah sudut peluaran setiap poligon ialah 360°.
7. (a) 2 ialah faktor bagi 8.
   (b) $x = 5$
   (c) Jika $\alpha = \beta$, maka $\sin^2\alpha + \kos^2\beta = 1$.
   (d) 54 ialah gandaan bagi 18.
   (e) $m \leqslant 0$
   (f) Fungsi $g(x)$ ialah fungsi kuadratik.
8. (a) Luas permukaan bagi lima kon yang sama ialah 700π cm^2.
   (b) Persamaan garis lurus PQ ialah $y = 3x + 5$.
9. (a) $n^2 - 5$; $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$
   (b) $2^n + 3$; $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
   (c) $4n + n^2$; $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$
   (d) $3n + 2(n-1)^2$; $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$
10. (a) Hujah deduktif
    (b) Hujah induktif
11. (a) Pola bilangan silinder ialah $2n + 1$; $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$
    (b) 104 720 cm^3
12. (a) $32(\pi+2), 16(\pi+2), 8(\pi+2), 4(\pi+2)$
    (b) $\frac{1}{4}(\pi+2)$ cm

BAB 4 Operasi Set

Praktis Kendiri 4.1a

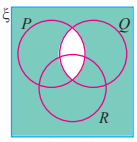
1. (a) $M = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ (b) $N = \{3, 6, 9\}$
   (c) $M \cap N = \{3, 9\}$
2. (a) $J \cap K = \{4, 6, 9\}$ (b) $J \cap L = \{3, 9\}$
   (c) $K \cap L = \{9\}$ (d) $J \cap K \cap L = \{9\}$
3. 

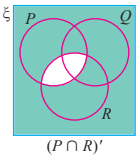
4. (a) $A \cap B = \{I\}$, $n(A \cap B) = 1$
(b) $A \cap C = \{\ \}$, $n(A \cap C) = 0$
(c) $B \cap C = \{\ \}$, $n(B \cap C) = 0$
(d) $A \cap B \cap C = \{\ \}$, $n(A \cap B \cap C) = 0$

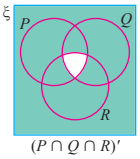
Praktis Kendiri 4.1b

1. (a) $(P \cap Q)' = \{2, 4, 6, 8, 9, 10\}$
(b) $(Q \cap R)' = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
(c) $(P \cap Q \cap R)' = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

2. (a) $(G \cap H)' = \{11, 12, 14, 16, 17, 18\}$
(b) $(G \cap I)' = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$
(c) $(H \cap I)' = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$
(d) $(G \cap H \cap I)' = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$

3. (a) 

$(P \cap Q)'$
(b) 

$(P \cap R)'$
(c) 

$(P \cap Q \cap R)'$

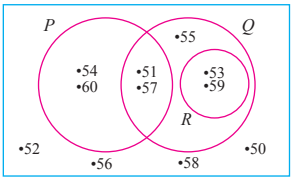
4. (a) $(M \cap L)' = \{a, b, c, d, f, g\}$
(b) $(N \cap L)' = \{a, b, c, d, g\}$
(c) $(M \cap N)' = \{a, b, d, f, g\}$
(d) $(L \cap M \cap N)' = \{a, b, c, d, f, g\}$

Praktis Kendiri 4.1c

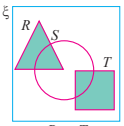
1. (a) 15 (b) 30
2. (a) 123 (b) 15 (c) 78
3. 62
4. 16
5. 8

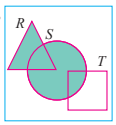
Praktis Kendiri 4.2a

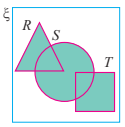
1. (a) $A \cup B = \{b, d, k, n, p, s\}$
(b) $A \cup C = \{f, g, k, l, n, p, s\}$
(c) $B \cup C = \{b, d, f, g, l, n, s\}$
(d) $A \cup B \cup C = \{b, d, f, g, k, l, n, p, s\}$

2. (a) 

(b) (i) $P \cup Q = \{51, 53, 54, 55, 57, 59, 60\}$
(ii) $P \cup R = \{51, 53, 54, 57, 59, 60\}$
(iii) $Q \cup R = \{51, 53, 55, 57, 59\}$
(iv) $P \cup Q \cup R = \{51, 53, 54, 55, 57, 59, 60\}$

3. (a) 

$R \cup T$
(b) 

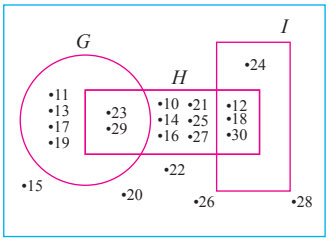
$R \cup S$
(c) 

$R \cup S \cup T$

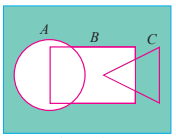
4. (a) $J \cup K = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$
(b) $J \cup L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$
(c) $J \cup K \cup L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

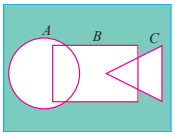
Praktis Kendiri 4.2b

1. (a) $A' = \{3, 4, 7, 8\}$
(b) $B' = \{5, 6, 7, 8\}$
(d) $(A \cup B)' = \{7, 8\}$

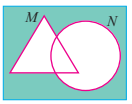
2. (a) 

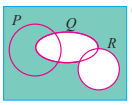
(b) (i) $(G \cup H)' = \{15, 20, 22, 24, 26, 28\}$
(ii) $(H \cup I)' = \{11, 13, 15, 17, 19, 20, 22, 26, 28\}$
(iii) $(G \cup H \cup I)' = \{15, 20, 22, 26, 28\}$

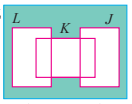
3. (a) 

$(A \cup B)'$
(b) 

$(A \cup B \cup C)'$

4. (a) 

$(M \cup N)'$
(b) 

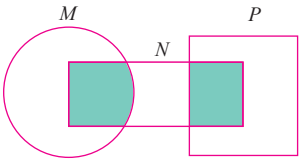
$(Q \cup R)'$
(c) 

$(J \cup K \cup L)'$

Praktis Kendiri 4.2c

1. $x = 3$
2. 8
3. 11
4. (a) 25 (b) 87 (c) 61
5. 94

Praktis Kendiri 4.3a

1. 

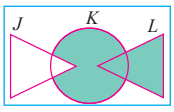
2. $(S \cup T) \cap R = \{3, 5, 7, 11, 13\}$

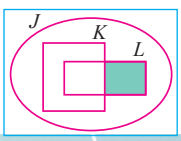
3. (a) $P \cap (Q \cup R) = \{3\}$
(b) $Q \cap (P \cup R) = \{3, 8\}$
(c) $(Q \cup R)\ P = \{2, 3, 6, 7, 8\}$

Praktis Kendiri 4.3b

1. (a) $L' \cap (M \cup N) = \{13, 15, 19\}$
(b) $(M \cup N)' \cap L = \{12, 14, 18\}$

2. 25

3. (a) 

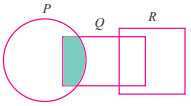
(b) 

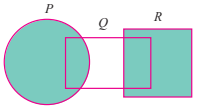
4. (a) $y = 11$ (b) 51

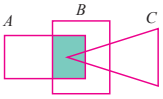
Praktis Kendiri 4.3c

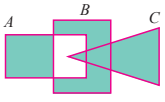
1. 39
2. $k = 4$
3. 12
4. (a) 41 (b) 25 (c) 7

Praktis Komprehensif

1. (a) $P \cap Q = \{3, 5\}$
(b) $P \cap R = \{3\}$
(c) $P \cap Q \cap R = \{3\}$
(d) $(P \cap Q \cap R)' = \{2, 5, 6\}$
2. (a) $M \cup N = \{a, b, d, i, k, u\}$
(b) $M \cup P = \{a, b, e, i, k, n, r\}$
(c) $M \cup N \cup P = \{a, b, d, e, i, k, n, r, u\}$
3. (a) 

$P \cap Q$
(b) 

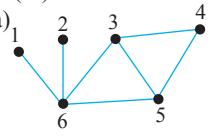
$P \cup R$
4. (a) $T' = \{1, 3, 5, 6, 8\}$
(b) $S \cup T = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
(c) $S' \cap T = \{2, 4, 9\}$
(d) $(S \cup T)' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$
5. $A' = \{d, e, f, h, i\}$
6. (a) $Q' = \{11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29\}$
(b) $P \cup R' = \{10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30\}$
(c) $(P \cup R)' \cap Q = \{10, 15, 20, 25, 30\}$
7. (a) 

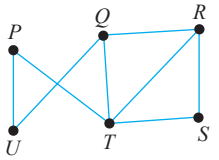
$A \cap (B \cup C)$
(b) 

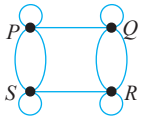
$C \cup (A \cap B)'$
8. 39
9. 31
10. 6
11. (a) 8 (b) 11 (c) 54
12. (a) 8 (b) 5 (c) 7 (d) 2
13. 50

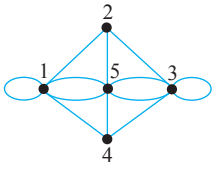
BAB 5 Rangkaian dalam Teori Graf

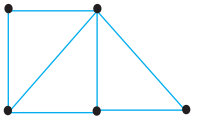
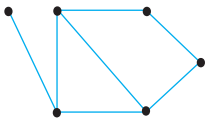
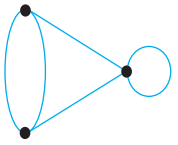
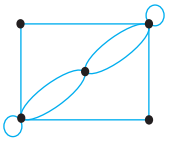
Praktis Kendiri 5.1a

1. (a) (i) $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$n(V) = 5$
(ii) $E = \{(1, 2), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (4, 5)\}$
$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$
$n(E) = 7$
(iii) 14
(b) (i) $V = \{P, Q, R, S, T, U, V, W\}$
$n(V) = 8$
(ii) $E = \{(Q, P), (Q, R), (Q, W), (R, V), (S, T), (S, U), (U, V), (V, W)\}$
$n(E) = 8$
(iii) 16
(c) (i) $V = \{A, B, C, D, E, F\}$
$n(V) = 6$
(ii) $E = \{(A, B), (A, F), (B, C), (B, E), (C, D), (C, E), (D, E), (E, F)\}$
$n(E) = 8$
(iii) 16
2. (a) (i) $V = \{A, B, C, D, E\}$
$n(V) = 5$
(ii) $E = \{(A, B), (A, B), (A, E), (B, C), (B, D), (B, E), (C, C), (C, D), (D, E), (D, E)\}$
$n(E) = 10$
(iii) 20
(b) (i) $V = \{O, P, Q, R, S, T, U\}$
$n(V) = 7$
(ii) $E = \{(P, U), (P, U), (U, T), (U, T), (P, Q), (P, O), (Q, R), (Q, R), (Q, O), (R, R), (R, S), (R, S), (R, O), (S, O), (S, T), (T, O), (U, O)\}$
$n(E) = 17$
(iii) 34
3. (a) 

(b) 

4. (a) 

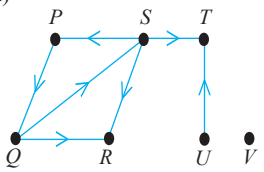
(b) 

5. (a) 
(b) 
6. (a) 
(b) 

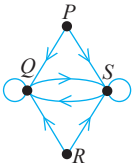
Praktis Kendiri 5.1b

1. (i) Tepi ditanda dengan arah.
(ii) Penulisan pasangan bucu adalah mengikut arah pada tepi.
2. Suatu nilai atau maklumat yang mengaitkan bucu.

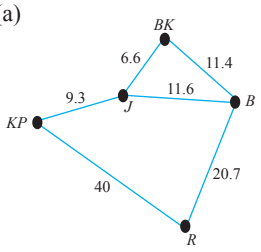
3. (a)



(b)



4. (a)



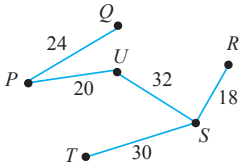
(b) 1.6 km

Praktis Kendiri 5.1c

1. Subgraf – Rajah 1, Rajah 2, Rajah 3, Rajah 4, Rajah 8, Rajah 11.
Bukan Subgraf – Rajah 5, Rajah 6, Rajah 7, Rajah 9, Rajah 10.

3. (a) Bukan (b) Bukan
(c) Pokok (d) Bukan

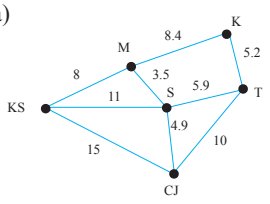
6. (a)



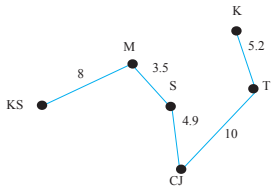
(b) Jumlah pemberat
$= 24 + 20 + 32 + 18 + 30$
$= 124$

Praktis Kendiri 5.1d

1. (a)

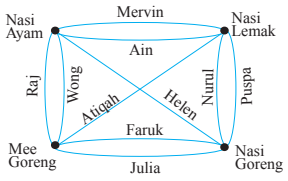


(b)



(c) 31.6 km

2. (a)



(b) Jenis makanan. Tidak bersilang.
(c) Jumlah darjah = Bilangan murid × pilihan makanan.
(d) graf

3. (b) Graf tak terarah. Carta organisasi ialah suatu rangkaian kerana ia mempamerkan kaitan antara individu yang terlibat berdasarkan kehendak carta tersebut.

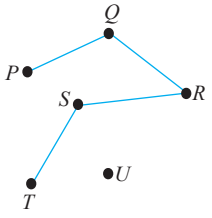
Praktis Kendiri 5.1e

1. (a) Johor Bahru – Kuching (Sabtu, 06:05 pagi) dan seterusnya Kuching – Miri (Sabtu, 11:45 pagi).
(b) Johor Bahru – Kuching (Jumaat, 20:00 malam) dan seterusnya Kuching – Miri (Jumaat, 21:55 malam). Walaupun harga tiket penerbangan ini RM35 lebih daripada penerbangan paling murah pada hari Sabtu, Encik Maswi dapat meluangkan masa yang lebih dengan keluarga.

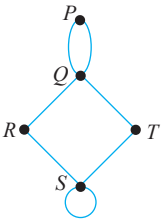
Praktis Komprehensif

1. (a) (i) $V = \{P, Q, R, S, T, U\}$
(ii) $E = \{(P, Q), (P, S), (P, U), (Q, R), (Q, T), (R, S), (R, U), (S, T), (T, U)\}$
(iii) 18
(b) (i) $V = \{P, Q, R, S, T, U\}$
(ii) $E = \{(P, P), (P, Q), (P, R), (Q, R), (R, S), (S, T), (S, T)\}$
(iii) 14
(c) (i) $V = \{P, Q, R, S, T\}$
(ii) $E = \{(P, Q), (R, Q), (S, R), (P, S), (S, P), (S, T), (T, T)\}$
(iii) 14

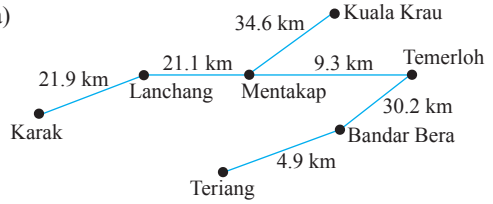
2. (a)



(b)



3. (a)



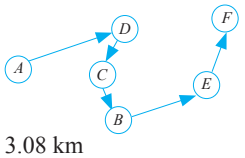
(b) Ya, kerana semua pasangan bucu dikaitkan dengan satu tepi. Bucu = 7, Tepi = 6

4. Laluan $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$ kerana ia merupakan laluan yang lebih selamat walaupun Lani terpaksa berkayuh lebih 300 m berbanding laluan $A \rightarrow B \rightarrow E$.

5. (a) (i) $P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow S$
(ii) $P \rightarrow S$
(b) Laluan $P \rightarrow Q \rightarrow S$ kerana boleh jimat RM35 dan beza masa ialah sembilan minit sahaja berbanding laluan $P \rightarrow S$.

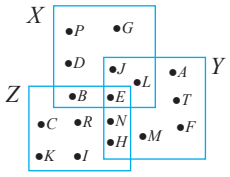
6. $11 = x_1 + x_2$, $x_4 = x_3 + 11$, $x_2 + x_3 = 20$,
$x_1 + 10 = x_5$, $x_5 + 10 = x_4$, $x_1 = 5$,
$x_2 = 6$, $x_3 = 14$, $x_4 = 25$.

7. (a)



(b) 3.08 km

8. (a)



(b) (i) $\{C, R, K, I\}$
(ii) $\{P, G, D, C, R, K, I\}$
(iii) $\{E\}$

9. (b) (i) RM1 080 (ii) 40

10. (a) ketiga (b) 484 (c) 13 068

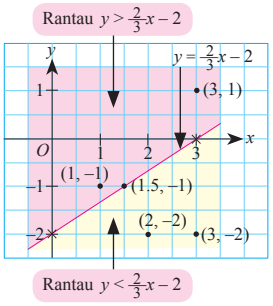
BAB 6 Ketaksamaan Linear Dalam Dua Pemboleh Ubah

Praktis Kendiri 6.1a

1. (a) $25x + 45y \leqslant 250$ atau $5x + 9y \leqslant 50$
(b) $2x + 1.5y \leqslant 500$ atau $4x + 3y \leqslant 1\,000$
(c) $0.3x + 0.4y \leqslant 50$ atau $3x + 4y \leqslant 500$
(d) $1.5x + 3.5y \geqslant 120$ atau $3x + 7y \geqslant 240$

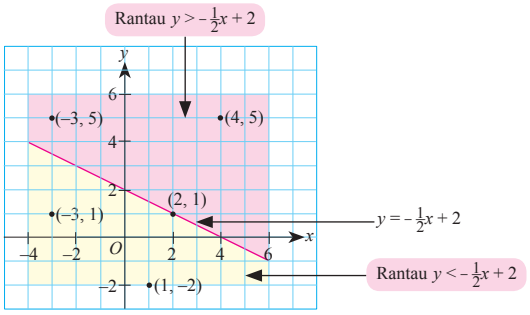
Praktis Kendiri 6.1b

1.



$y = \frac{2}{3}x - 2$	(1.5, −1)
$y > \frac{2}{3}x - 2$	(3, 1), (1, −1)
$y < \frac{2}{3}x - 2$	(2, −2), (3, −2)

2.



$y = -\frac{1}{2}x + 2$	(2, 1)
$y > -\frac{1}{2}x + 2$	(−3, 5), (4, 5)
$y < -\frac{1}{2}x + 2$	(−3, 1), (1, −2)

3.

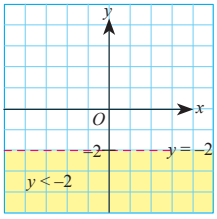
$y = 4x - 5$	(3, 7)
$y > 4x - 5$	(2, 4), (−2, 0)
$y < 4x - 5$	(0, −6), (4, 5)

4.

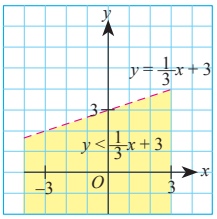
$y = -3x + 4$	(1, 1)
$y > -3x + 4$	(−1, 8), (−0.5, 7)
$y < -3x + 4$	(−2, 3), (0, 1)

Praktis Kendiri 6.1c

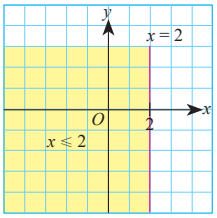
1. (a)



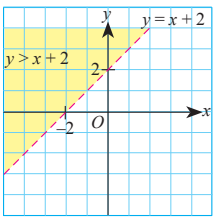
(b)



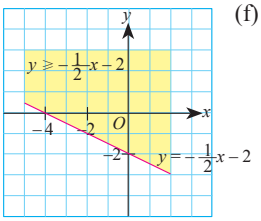
(c)



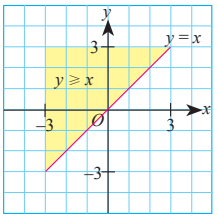
(d)



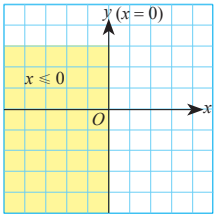
(e)



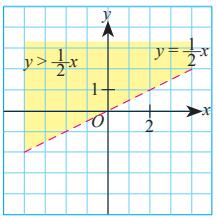
(f)



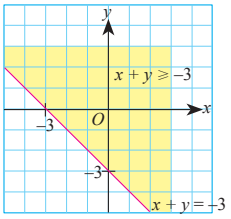
2. (a)



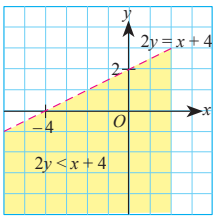
(b)



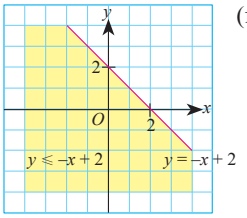
(c)



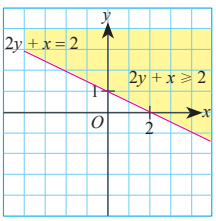
(d)

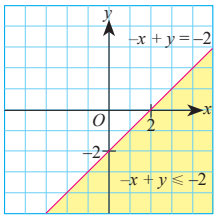


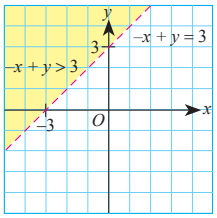
(e)



(f)



(g) 

(h) 

Praktis Kendiri 6.2a

1. (a) $x + y \leqslant 50$ (b) $x \geqslant 2y$ atau $2y \leqslant x$
(c) $8x + 12y \leqslant 850$

2. (a) $x + y \leqslant 500$ (b) $x \leqslant 3y$ atau $3y \geqslant x$
(c) $y \geqslant 200$

3. x = cili hijau, y = cili padi
(a) $x + y \leqslant 250$ (b) $x \geqslant 3y$ atau $3y \leqslant x$
(c) $x \geqslant 100$

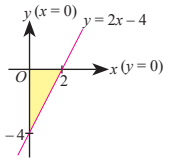
Praktis Kendiri 6.2b

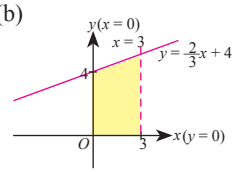
1. (a) D (b) A (c) C (d) B

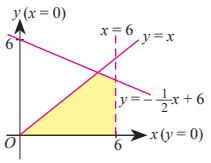
2. (a) E (b) C (c) A (d) D

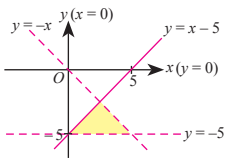
Praktis Kendiri 6.2c

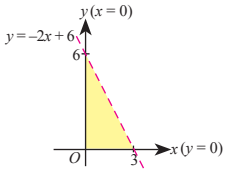
1. (a) C (b) C (c) A

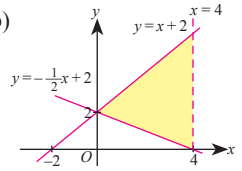
2. (a) 

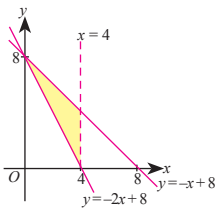
(b) 

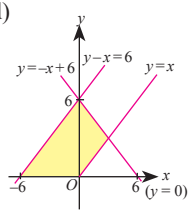
(c) 

(d) 

3. (a) 

(b) 

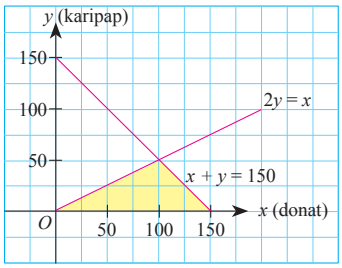
(c) 

(d) 

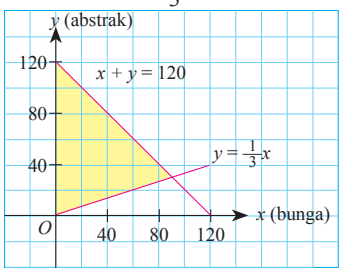
Praktis Kendiri 6.2d

1. (a) $y < x + 4$, $y \geqslant 0$ dan $x \leqslant 0$
(b) $y > 2x - 4$, $y > -2x - 4$ dan $y \leqslant 0$
(c) $3y \leqslant 5x$, $y > x$ dan $x \leqslant 3$

2. (a) $x > -4$, $y \leqslant -\frac{1}{2}x$ dan $y \geqslant 0$
(b) $y \leqslant 2x + 4$, $y \leqslant -\frac{4}{3}x + 4$, $y \geqslant 0$
(c) $y \leqslant x - 1$, $y \geqslant \frac{2}{3}x - 2$, $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$

3. (a) $x + y \leqslant 150$, $2y \leqslant x$
(b) 

(c) (i) 50
(ii) Minimum = 50; maksimum = 125

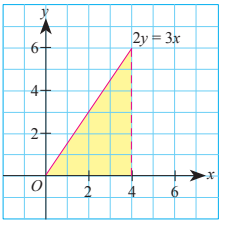
4. (a) $x + y \leqslant 120$, $y \geqslant \frac{1}{3}x$
(b) 

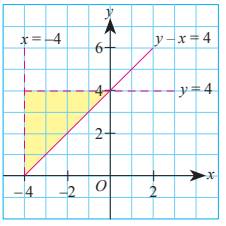
(c) 90 m

(d) Tidak. Titik (80, 60) berada di luar rantau berlorek

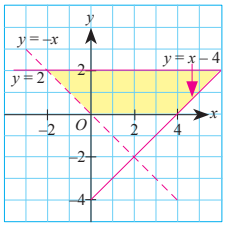
Praktis Komprehensif

1. (a) $2y > x + 5$, $y - x > 8$
(b) $x \geqslant 0$, $x \geqslant -5$
(c) $y \leqslant 4 - x$, $x \leqslant 2 - y$, $y + x \leqslant 2$, $y \leqslant -\frac{1}{2}x$
(d) $y < 4$, $y < -1$
(e) $y \geqslant 0$, $y \geqslant 10$
(f) $y < 2x - 5$, $-y > 8 - 2x$, $2y < x$
(g) $y > -x - 3$, $3y + x > 4$
(h) $\frac{1}{2}y - x \geqslant 4$, $2y \geqslant x$, $-y \leqslant 4 - x$

2. (a) 

(b) 

(c)



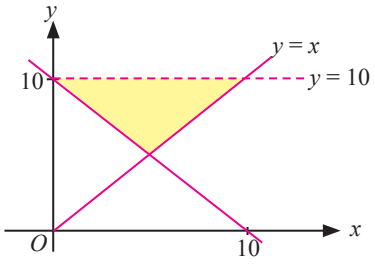
3. (a) $y \geqslant -2x$, $y > x$ dan $y < 4$

(b) $y < 2x$, $y \geqslant \frac{1}{2}x$ dan $y \leqslant -\frac{1}{2}x + 6$

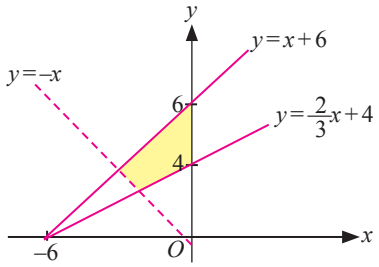
(c) $y - x \leqslant 4$, $2y > x + 4$ dan $y < 3$

(d) $y \geqslant \frac{3}{2}x + 6$, $x > -4$, $y < 5$

4. (a)



(b)



5. (a) $y \leqslant 2$, $x < 3$, $y \geqslant -x$, $y \geqslant 0$

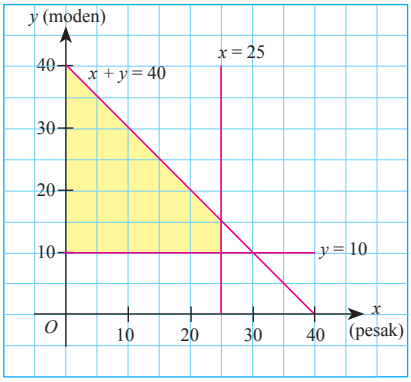
(b) $y > -2x$, $y \geqslant 2x - 8$, $y \leqslant -\frac{1}{2}x$

6. (a) $y < -1$, $x \geqslant -5$, $y \geqslant \frac{4}{5}x - 1$

(b) $x \geqslant 2$, $y \geqslant 0$, $y < -x + 6$

7. (i) $x + y \leqslant 40$, $y \geqslant 10$, $x \leqslant 25$.

(ii)

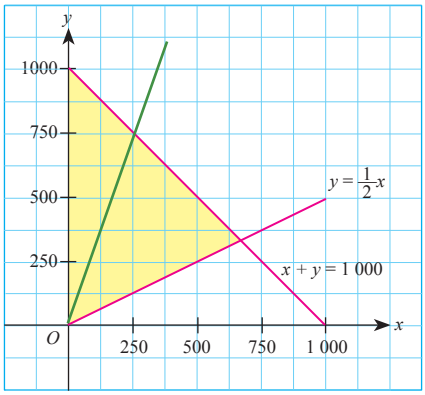


(iii) minimum = 10,
maksimum = 30

(iv) RM2 625

8. (a) $x + y \leqslant 1\,000$, $y \geqslant \frac{1}{2}x$

(b)



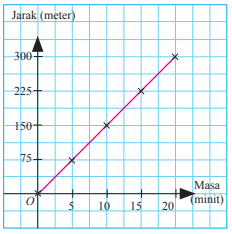
(c) minimum = 250 m, maksimum = 500 m

(d) (i) $y \geqslant 3x$

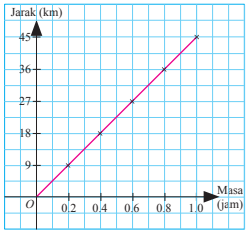
BAB 7 Graf Gerakan

Praktis Kendiri 7.1a

1.

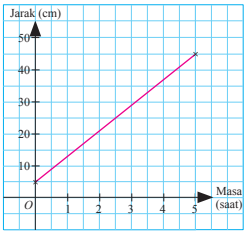


2.



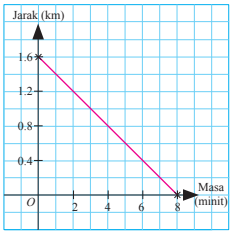
3.

Masa, t (saat)	0	5
Jarak, s (cm)	5	45



4.

Masa, t (minit)	0	8
Jarak, s (km)	1.6	0



Praktis Kendiri 7.1b

1. (a) 50

(b) Kereta berada dalam keadaan pegun.

(c) (i) 40

(ii) Kereta bergerak sejauh 100 km dengan laju purata 40 km j^{-1} dalam tempoh 2.5 jam.

2. (a) 2

(b) 4.8

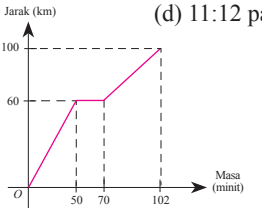
(c) Encik Rashid berlari sejauh 4 km dengan laju purata 4.8 km j^{-1} dalam tempoh 50 minit.

3. (a) 1424
(b) (i) Kereta berada dalam keadaan pegun untuk tempoh 66 minit.
(ii) Kereta bergerak dengan laju purata 40 km j^{-1} sejauh 30 km dalam tempoh 45 minit.

4. (a) 40
(b) Kereta bergerak dengan laju purata 54 km j^{-1} sejauh 36 km dalam tempoh 40 minit.

Praktis Kendiri 7.1c

1. (a) 3
(b) Ya, Jeffrey akan menamatkan lariannya dalam 12 saat.

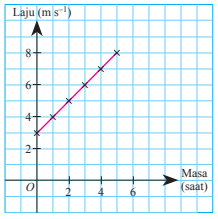
2. (a) 50 (b) 70
(c) 

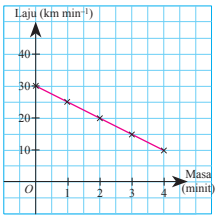
(d) 11:12 pagi

3. (a) 25 minit
(b) (i) 27 (ii) 33 km
(c) 80
(d) 45

4. (a) 20
(b) 60
(c) Kereta bergerak dengan laju purata 72 km j^{-1} sejauh 36 km dalam tempoh 30 minit.

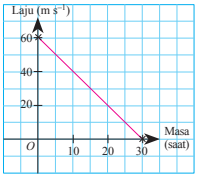
Praktis Kendiri 7.2a

1. (a) 

(b) 

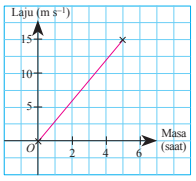
2. (a)

Masa, t (saat)	0	30
Laju, v (m s^{-1})	60	0



(b)

Masa, t (saat)	0	5
Laju, v (m s^{-1})	0	15



Praktis Kendiri 7.2b

1. (a) 360 (b) 0.275 (c) 2.6

2. (a) $14\frac{2}{3}$ (b) $29\frac{1}{3}$

3. (a) 16 (b) 22.5

Praktis Kendiri 7.2c

1. (a) Motosikal mengalami nyahpecutan 0.75 m s^{-2} dalam tempoh 20 saat; atau
kelajuan motosikal berkurangan dari 35 m s^{-1} kepada 20 m s^{-1} dalam tempoh 20 saat; atau
motosikal bergerak sejauh 550 m dalam tempoh 20 saat.
(b) Motosikal bergerak dengan laju seragam 20 m s^{-1} selama 30 saat; atau
motosikal bergerak sejauh 600 m dengan laju seragam.

2. (a) $\frac{5}{6}$ m s^{-2} (b) 260 m
(c) Zarah bergerak dengan laju seragam 15 m s^{-1} untuk tempoh 7 saat.

3. (a) $\frac{3}{8}$ m s^{-2} (b) 1 200 m
(c) Encik Merisat memandu kereta sejauh 1.725 km dalam masa 2.5 minit dengan laju purata 41.4 km j^{-1}

Praktis Kendiri 7.2d

1. (a) 96 (b) 18
2. (a) 1 (b) 25.5 (c) 14
3. (a) 28 (b) 15

Praktis Komprehensif

1. (a) 6 minit (b) 60 (c) 42.86
2. (a) 100 (b) 1.6 (c) 57.14
3. (a) 8 saat (b) 17
4. (a) $-\frac{7}{6}$ (b) 6 (c) 19.68
5. (a) 12 (b) 32.4 (c) 60
6. (a) 80 (b) Jam 0915
7. (a) (i) 80
(ii) Kereta A bergerak dengan laju purata 25 m s^{-1} sejauh 2 km dalam tempoh 80 saat.
(b) 1

BAB 8 Sukatan Serakan Data Tak Terkumpul

Praktis Kendiri 8.1a

1 (a) 45, 150 (b) 105
2. $p = 30$, $q = 120$
3. 2.3

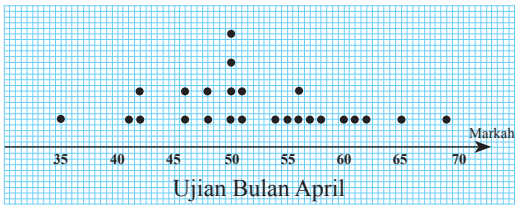
Praktis Kendiri 8.1b

1.

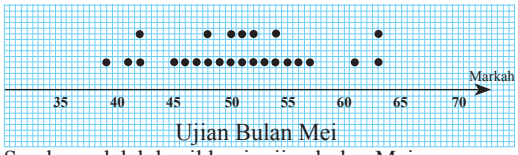
Kumpulan A		Kumpulan B
9 7 6 5 4 1	4	0 0 1 2 2 6 8 9
8 6 4 4 3 3 2 2 0	5	2 2 4 5 5 6 6 7 7 8 8 9 9
9 8 8 7 6 4 3 3 2 2 1 0 0	6	0 1 3 4 4 5 6 9 9
6 6 5 3 2 0 0 0	7	0 0 2 5 6 6 8
6 4 2 2 1	8	2 3 3 4

Secara umum, jisim badan murid kumpulan A adalah lebih besar berbanding dengan jisim badan murid kumpulan B.

2.



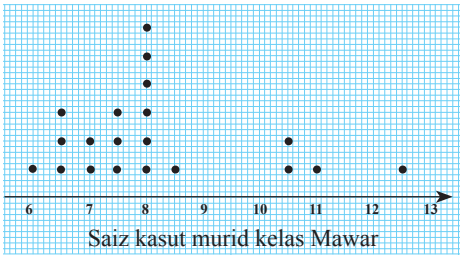
Ujian Bulan April



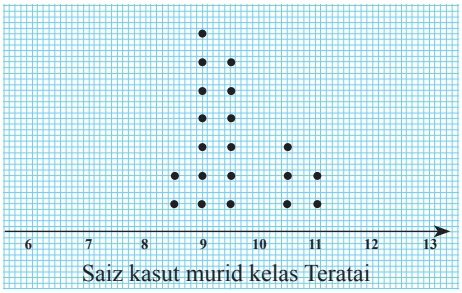
Ujian Bulan Mei

Serakan adalah kecil bagi ujian bulan Mei.

3. (a)



Saiz kasut murid kelas Mawar



Saiz kasut murid kelas Teratai

(b) Saiz kasut murid dari kelas Mawar ditabur luas berbanding dengan kelas Teratai.
Kelas Mawar mempunyai beza saiz kasut yang lebih besar.
Beza saiz kasut kelas Mawar
$=12.5 - 6 = 6.5$
Beza saiz kasut kelas Teratai
$=11 - 8.5 = 2.5$

Praktis Kendiri 8.2a

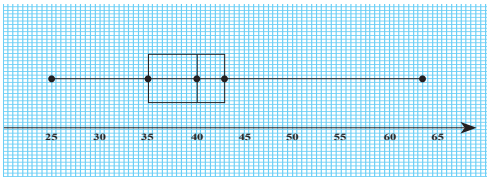
1. (a) 7, 3 (b) 12, 5.5 (c) 0.9, 0.45
2. (a) 5,2 (b) 5,3
3. (a) 7, 2.646 (b) 24.86, 4.986
4. 1.26, 1.122

Praktis Kendiri 8.2b

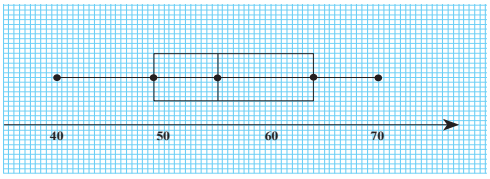
1. Julat = 27
Julat antara kuartil = 11
Julat antara kuartil lebih sesuai sebab terdapat nilai pencilan.
2. Sisihan piawai, murid B
3. (a) 2100, 310, 702.2. (b) Julat antara kuartil

Praktis Kendiri 8.2c

1. (a)



(b)



2. (a) 11 (b) 21 (c) 13 (d) 18 (e) 5 (f) 16

Praktis Kendiri 8.2d

1. 6,3.2
2. 9, 29.16
3. 3.742, meningkat dengan banyak
4. (a) 2.728
(b) (i) 5.456 (ii) 1.364
5. 100, 43.2
6. 0.9, 1.2

Praktis Kendiri 8.2e

1. $\sigma_A = 0.2506$, $\sigma_B = 0.3706$, atlet A lebih konsisten.
2. $\sigma_A = 12.65$, $\sigma_B = 6.321$, baja B.

Praktis Kendiri 8.2f

1. (a) $h = 11$, $k = 18$ (b) 4.276
2. (a) $\sum x = 180$, $\sum x^2 = 1700$ (b) 2.25

Praktis Komprehensif

1. (a) 17, 13 (b) 44, 23 (c) 1.6, 0.75 (d) 20, 5.5
2. (a) 1.2, 0.4 (b) 5, 3
3. (a) varians = 5.917, sisihan piawai = 2.432
(b) varians = 52.8, sisihan piawai = 7.266
(c) varians = 0.46, sisihan piawai = 0.6782
(d) varians = 70.18, sisihan piawai = 8.377
4. varians = 130.3, sisihan piawai = 11.41
5. (a) julat = 20, sisihan piawai = 10.4
(b) julat = 2.5, sisihan piawai = 1.3
6. (a) 360 (b) 16220
7. (a) (i) $m = 7$ (ii) 4.980
(b) 223.2
8. (a) 90.75 (b) (i) 12 (ii) 9.315
9. $\frac{56}{3}$
10. (a)

Pasukan A	Pasukan B
min = 61	min = 61
Julat = 22	Julat = 30
varian = 78.8	varian = 155.6
Sisihan piawai = 8.877	Sisihan piawai = 12.47

(b) Tidak, kerana wujud pencilan
(c) Pasukan B

11. (a) min = 18, varians = 56
(b) min = 18.09, varians = 51.02

12. (a) 9, 2, 3.210, 1.792 (b) julat antara kuartil

BAB 9 Kebarangkalian Peristiwa Bergabung

Praktis Kendiri 9.1a

1. $\{(S_1, S_2), (S_1, G), (S_1, M), (S_2, S_1), (S_2, G), (S_2, M), (G, S_1), (G, S_2), (G, M), (M_1, S_1), (M, S_2), (M, G)\}$.

2. {(L, L), (L, P), (P, L), (P, P)}

3. {(1, A), (2, A), (3, A), (4, A), (5, A), (6, A), (1, G), (2, G), (3, G), (4, G), (5, G), (6, G)}

4. {AAA, KKK, AAKA, AKAA, KAAA, KKAK, KAKK, AKKK, KAKAA, KAAKA, KKAAA, AAKKA, AKAKA, AKKAA, AAKKK, AKAKK, AKKAK, KAAKK, KAKAK, KKAAK}

Praktis Kendiri 9.2a

1. Peristiwa Tak Bersandar

2. Peristiwa Bersandar

3. Peristiwa Tak Bersandar

4. Peristiwa Bersandar

5. Peristiwa Tak Bersandar

Praktis Kendiri 9.2b

1. (a)

Dadu Pertama	Dadu Kedua					
	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

(b) 36

(c) {(1, 2), (1, 3), (1, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 5), (5, 2), (5, 3), (5, 5)}; $\frac{1}{4}$

2. $\{(K_1, K_1), (K_1, K_2), (K_1, K_3), (K_2, K_1), (K_2, K_2), (K_2, K_3), (K_3, K_1), (K_3, K_2), (K_3, K_3)\}$; $\frac{9}{64}$

3. $\{(K_1, K), (K_2, K)\}$; $\frac{1}{6}$

Praktis Kendiri 9.2c

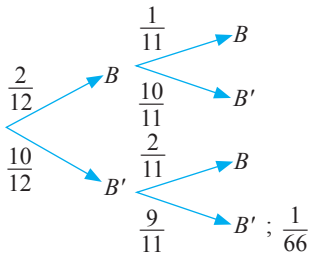
1. {(A, 2), (U, 2)}; $\frac{1}{6}$

2. {(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3)}; $\frac{1}{4}$

3. 0.2025

4. {(C, E), (C, I), (L, E), (L, I), (K, E), (K, I)}; $\frac{3}{10}$

5. B = Mentol terbakar
B' = Mentol tak terbakar



; $\frac{1}{66}$

6. (a) 0.3166
(b) 0.2108

Praktis Kendiri 9.3a

1. (a) Peristiwa Tidak Saling Eksklusif
(b) Peristiwa Saling Eksklusif
(c) Peristiwa Tidak Saling Eksklusif

2. (a) Peristiwa Tidak Saling Eksklusif
(b) Peristiwa Tidak Saling Eksklusif
(c) Peristiwa Saling Eksklusif

3. (a) Peristiwa Saling Eksklusif
(b) Peristiwa Tidak Saling Eksklusif
(c) Peristiwa Tidak Saling Eksklusif

Praktis Kendiri 9.3b

1. (a) {(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6), (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)}; $\frac{7}{18}$

(b) {(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)}; $\frac{5}{18}$

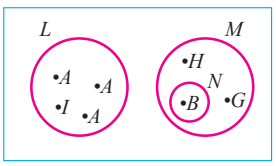
(c) {(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 6), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (6, 6)}; $\frac{4}{9}$

2. (a) {AA, GG}; $\frac{1}{2}$

(b) {AA, AG, GA}; $\frac{3}{4}$

(c) {GG, AG, GA, AA}; 1

3. (a) ξ

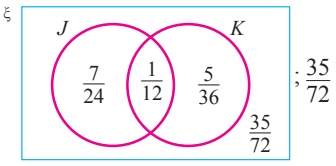


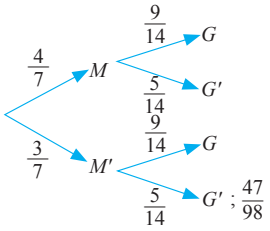
(b) (i) {B, A, H, A, G, I, A}; 1

(ii) {A, A, A, I, B}; $\frac{5}{7}$

(ii) {B, H, G}; $\frac{3}{7}$

Praktis Kendiri 9.3c

1. {E, I, A, R}, $\frac{4}{7}$
2. {(S, 4), (S, 5), (S, 6), (E, 6), (R, 6), (I, 6)}, $\frac{1}{2}$
3. 

; $\frac{35}{72}$
4. 

; $\frac{47}{98}$

Praktis Kendiri 9.4a

1. 12 000
2. $\frac{13}{36}$
3. Pantai Cengal kerana kebarangkalian tidak hujan bagi kedua-dua hari di Pantai Cengal lebih tinggi.
4. 230

Praktis Komprehensif

1. $\{(U_1,U_2), (U_1,U_3), (U_1,H_1), (U_1,H_2), (U_2,U_1), (U_2,U_3), (U_2,H_2), (H_1,U_1), (H_1,U_2), (H_1,U_3), (U_2,H_1), (U_3,U_1), (U_3,U_2), (U_3,H_1), (U_3,H_2), (H_1,H_2), (H_2,H_1), (H_2,U_1), (H_2,U_2), (H_2,U_3)\}$
2. (a) $\frac{1}{15}$ (b) $\frac{7}{30}$
3. (a) (91, R), (77, I), (77, A), (91, A)
   (b) (i) {(77, R)}, $\frac{1}{6}$
   (ii) {(77, R), (77, A), (77, I), (91, R)}, $\frac{2}{3}$
4. $\frac{2}{5}$
5. (a) 0.2436 (b) 0.5128
6. (a) $\frac{199}{540}$ (b) $\frac{47}{54}$
7. (a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{4}{9}$
8. (a) (i) $\frac{25}{156}$ (ii) $\frac{211}{468}$
   (b) RM70
9. $\frac{43}{200}$
10. (a) $\frac{7}{33}$ (b) $\frac{5}{33}$
11. (a) (i) 0.191 (ii) 0.784
    (b) Tidak wajar. Sayangi nyawa

BAB 10 Matematik Pengguna: Pengurusan Kewangan

Praktis Kendiri 10.1a

1. Pengurusan kewangan merupakan suatu proses yang melibatkan pengurusan wang daripada sumber pendapatan terhadap simpanan, perbelanjaan, perlindungan dan pelaburan.
2. Proses pengurusan kewangan terdiri daripada menetapkan matlamat, menilai kedudukan kewangan, mewujudkan pelan kewangan, melaksanakan pelan kewangan dan mengkaji semula dan menyemak kemajuan.
3. Penetapan matlamat kewangan akan mempengaruhi jumlah simpanan bulanan bagi mencapai matlamat.
4. Matlamat kewangan jangka pendek ialah kurang daripada satu tahun dan tidak melibatkan jumlah wang yang banyak untuk mencapai matlamat tersebut manakala matlamat jangka panjang adalah melebihi 5 tahun dan melibatkan jumlah wang yang besar berbanding dengan matlamat kewangan jangka pendek.
5. Puan Salmah mengamalkan konsep matlamat kewangan SMART iaitu spesifik – perlu menyimpan sebanyak RM3 000 untuk membeli komputer riba, dengan simpanan bulanan sebanyak RM300 dan bukan sukar untuk mencapai matlamat tersebut dengan jumlah pendapatan yang diperoleh serta bersifat realistik dengan simpanan sebanyak RM300 untuk 10 bulan (tempoh masa).

Praktis Kendiri 10.1b

1. • Inflasi
   • Dasar kerajaan
   • Kesihatan diri
2. (a) Beliau tidak mengamalkan perbelanjaan secara berhemat kerana jumlah simpanan bulanan hanya RM250 berbanding pendapatan sebanyak RM6 000 adalah kurang daripada 10%.
   (b) Beliau tidak boleh mencapai matlamat pelaburan RM500 000 dengan simpanan bulanan sebanyak RM250.

Praktis Komprehensif

1. Tidak menyediakan perancangan kewangan, perbelanjaan yang tidak berhemah, penggunaan kad kredit tanpa kawalan, gagal menjelaskan hutang berbentuk pinjaman dan ansuran kereta.
2. Aliran tunai negatif seseorang individu dalam pelan kewangan akan menyebabkan individu muflis dan tidak mempunyai simpanan untuk menghadapi waktu kecemasan.

3. Pelan kewangan diwujudkan dengan tujuan mengira anggaran awal untuk mencapai setiap matlamat dan simpanan bulanan yang diperlukan bagi mencapai matlamat jangka pendek dan jangka panjang, menganalisis tabiat perbelanjaan serta menetapkan tempoh masa untuk mencapai matlamat tersebut.
4. Apabila kita mengkaji semula dan menyemak kemajuan pelan kewangan yang memberi ruang untuk kita memperbaiki dari segi sifat perbelanjaan dan perlulah berusaha menambahkan pendapatan tambahan untuk mencapai matlamat tersebut.
5. Inflasi, perubahan dasar percukaian oleh kerajaan, dasar ekonomi dan sebagainya.
6. Boleh memperbetulkan cara perbelanjaan mengikut matlamat kewangan, boleh mengambil langkah seperti menambahkan pendapatan jika keadaaan memerlukan berbuat demikian.
7. Kita harus mengamalkan amalan menabung bagi memastikan matlamat kewangan dicapai dalam tempoh yang dirancang.
8. (a) Pelan kewangan peribadi bulanan Encik Nabil

Butiran	**Bulanan**	
Aliran tunai masuk/ pendapatan	**RM**	
(a) Pendapatan aktif:		
Gaji bersih	3 800	
Komisen	450	
Jumlah pendapatan aktif	4 250	4 250
(b) Pendapatan pasif:		
Hasil sewa rumah	600	
Jumlah pendapatan pasif	600	
Jumlah pendapatan bulanan	4 850	4 850
Tolak simpanan tetap bulanan	380	
Jumlah pendapatan selepas tolak simpanan		4 470
Tolak aliran tunai keluar/ perbelanjaan		
(a) Perbelanjaan tetap:		
Bayaran ansuran pinjaman rumah (1)	800	
Bayaran ansuran pinjaman rumah (2)	500	
Perbelanjaan insurans	350	
Jumlah perbelanjaan tetap	1 650	1 650
(b) Perbelanjaan tidak tetap:		2 820
Belanja makanan	900	
Bayaran utiliti	150	
Belanja tol dan petrol	200	
Langganan perkhidmatan Internet	100	
Makan di restoran mewah	400	
Jumlah perbelanjaan tidak tetap		1 750
Lebihan/kurangan		1 070

(b) Terdapat lebihan bagi pelan kewangan peribadi Encik Nabil iaitu wujud aliran tunai positif apabila jumlah pendapatan melebihi jumlah perbelanjaan. Hal ini menyebabkan kecairan Encik Nabil bertambah baik.

9. (a) Aliran tunai positif – membolehkan simpanan dilakukan dan mencapai matlamat kewangan seperti yang dirancang.
(b) Aliran tunai negatif – menyebabkan seseorang sukar mencapai matlamat kewangan dan mungkin mendapatkan sumber pinjaman seperti kad kredit.

Glosari

Asas nombor (*Number bases*)
Sistem penomboran suatu nombor.

Bankrap (*Bankrupt*)
Keadaan seseorang itu tidak berupaya menyelesaikan hutang kerana perbelanjaannya melebihi pendapatan. Sebagai akibatnya, mahkamah mengisytiharkan seseorang itu bankrap.

Bucu (*Vertex*)
Bintik yang mengaitkan satu garis.

Darjah (*Degree*)
Bilangan tepi yang mengaitkannya dengan bucu lain.

Digit (*Digit*)
Simbol yang digunakan atau digabungkan untuk membentuk nombor dalam sistem penomboran. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ialah 10 digit dalam sistem perpuluhan. Contohnya, nombor 124 651 mempunyai enam digit.

Diskret (*Discrete*)
Nilai yang boleh dibilang.

Fungsi kuadratik (*Quadratic Functions*)
Fungsi yang berbentuk $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c ialah pemalar dan $a \neq 0$. Kuasa tertinggi pemboleh ubah ialah 2 dan hanya mempunyai satu pemboleh ubah.

Gelung (*Loops*)
Tepi berbentuk lengkung atau bulatan yang berbalik kepada bucu asal.

Graf (*Graph*)
Suatu siri bintik yang dikaitkan antara satu sama lain melalui garis.

Graf jarak-masa (*Distance-time graph*)
Graf yang menunjukkan jarak perjalanan per unit masa. Kecerunan graf menunjukkan ukuran laju.

Graf laju-masa (*Speed-time graph*)
Graf yang menunjukkan hubungan antara laju sesuatu objek dalam tempoh masa yang tertentu. Kecerunan graf menunjukan ukuran pecutan. Luas di bawah graf menunjukkan jarak yang dilalui oleh objek berkenaan.

Graf mudah (*Simple graph*)
Graf tak terarah tanpa gelung atau berbilang tepi.

Graf pemberat (*Weighted graph*)
Tepi yang mengaitkan dua bucu suatu graf dinyatakan dengan nilai pemberat seperti jarak, kos, masa dan sebagainya.

Graf tak berpemberat (*Unweighted graph*)
Tepi yang mengaitkan dua bucu suatu graf tidak dinyatakan dengan nilai pemberat.

Graf terarah (*Directed graph*)
Tepi yang mengaitkan dua bucu suatu graf ditanda dengan arah kaitan.

Hujah (*Argument*)
Pendapat berserta alasan yang diberikan sebagai menyokong atau menentang sesuatu pendirian (pandangan dan sebagainya).

Hujah deduktif (*Deductive argument*)
Hujah deduktif ialah proses yang membuat kesimpulan yang khusus daripada premis yang umum.

Hujah induktif (*Inductive argument*)
Hujah induktif ialah proses yang membuat generalisasi berdasarkan kes-kes yang khusus.

Inflasi (*Inflation*)
Tingkat harga barang meningkat

Jarak (*Distance*)
Ukuran jauh atau ruang di antara dua titik.

Kebarangkalian peristiwa tak bersandar (*Probability of independent event*)
Dua peristiwa A dan B dikatakan saling tak bersandar sekiranya kebarangkalian peristiwa A tidak menjejaskan kebarangkalian peristiwa B.

Kesatuan set (*Union of sets*)
Gabungan semua unsur bagi dua atau lebih set. Simbolnya ialah ∪.

Ketaksamaan linear (*Linear inequalities*)
Ketaksamaan yang melibatkan ungkapan linear seperti $y > mx+c$, $y < mx+c$, $y \geqslant mx+c$, $y \leqslant mx+c$ dengan $m \neq 0$, x dan y ialah pemboleh ubah.

Laju (*Speed*)
Kadar perubahan jarak.

Laju seragam (*Average speed*)
Jarak yang bertambah secara malar terhadap masa.

Linear (*Linear*)
Perihal sesuatu yang berkaitan dengan atau berbentuk garisan lurus.

Nilai tempat (*Place value*)
Nilai bagi kedudukan digit dalam sesuatu nombor. Contohnya, nilai tempat 6 dalam 6934 ialah ribu dan nilai tempat 5 dalam 523 089 ialah ratus ribu.

Nyahpecutan (*Deceleration*)
Pecutan bernilai negatif.

Pemboleh ubah (*Variable*)
Kuantiti yang nilainya tidak tetap, yang diwakili dengan simbol seperti x, y dan z, yang boleh mengambil sebarang nilai daripada suatu set nilai tertentu.

Peristiwa bergabung (*Combined events*)
Kesudahan peristiwa daripada kesatuan atau persilangan dua atau lebih peristiwa.

Peristiwa saling eksklusif (*Mutual exclusive events*)
Dua peristiwa A dan B tidak bersilang antara satu sama lain maka peristiwa A dan B dikatakan saling eksklusif.

Pernyataan (*Statement*)
Ayat yang boleh ditentukan nilai kebenaran.

Persamaan kuadratik (*Quadratic equations*)
Persamaan yang boleh ditulis dalam bentuk am, $ax^2 + bx + c = 0$ dengan a, b dan c ialah pemalar dan $a \neq 0$. Persamaan ini perlu mempunyai satu pemboleh ubah dan kuasa tertinggi pemboleh ubah itu ialah 2.

Persilangan set (*Intersection of sets*)
Set unsur sepunya bagi dua atau lebih set yang berbeza. Persilangan digambarkan dengan simbol ∩.

Pokok (*Tree*)
Subgraf bagi suatu graf yang mempunyai kaitan yang paling minimum di antara bucu-bucunya tanpa gelung dan berbilang tepi.

Premis (*Premises*)
Sesuatu pernyataan dan sebagainya yang diandaikan (dianggap) sebagai sesuatu yang benar untuk tujuan membuat huraian yang membawa kepada sesuatu kesimpulan kelak.

Rangkaian (*Networking*)
Suatu graf yang mempunyai sekurang-kurangnya sepasang bintik.

Rantau (*Region*)
Kawasan yang memenuhi sistem ketaksamaan linear.

Sesaran (*Displacement*)
Jarak vektor dari suatu titik tetap diukur dalam arah tertentu.

Sisihan piawai (*Standard deviation*)
Sukatan statistik yang menyukat serakan bagi suatu set data.

Sistem ketaksamaan linear (*Linear inequalities system*)
Gabungan dua atau lebih ketaksamaan linear.

Songsangan (*Inverse*)
Songsangan bagi implikasi "Jika p, maka q" ialah "Jika q, maka p."

Subgraf (*Subgraph*)
Sebahagian atau keseluruhan suatu graf yang dilukis semula tanpa mengubah kedudukan asal bucu dan tepi.

Tepi (*Edge*)
Garis yang mengaitkan dua bucu.

Senarai Rujukan

Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1982) *Graph Theory With Applications*. New York. Elsevier Science Publishing Co. Inc.

Christopher, C. (1991). *The Concise Oxford Dictionary of Mathematics*. Oxford University Press.

Glosari Matematik Pusat Rujukan Persuratan Melayu, Dewan Bahasa dan Pustaka digunakan dari laman web http://prpmv1.dbp.gov.my

Izham Shafie. (2000). *Pengantar Statistik*. Penerbit Universiti Utara Malaysia.

James, N. (2008). *A Level Mathematics for Edexcel Statistics S1*. Oxford Universiti Press.

Lan, F. H. dan Yong, K. C. (2016). *Revision Essential Additional Mathematics SPM*. Sasbadi Sdn. Bhd.

Mok, S.S. (2011). *Logik dan Matematik Untuk Penyelesaian Masalah*. Penerbitan Multimedia Sdn. Bhd.

Murdoch, J. dan Barnes, J.A. (1973). *Statistik: Masalah dan Penyelesaian*. Unit Penerbitan Akademik Universiti Teknologi Malaysia.

Nguyen-Huu-Bong. (1996). *Logik dan Penggunaannya untuk Sains Komputer*. Penerbit Universiti Sains Malaysia.

Ooi, S.H., Moy, W.G., Wong, T.S. dan Jamilah Binti Osman. (2005). *Additional Mathematics Form 4*. Penerbit Nur Niaga Sdn. Bhd

Paul, Z. (1999). *The Art and Craft of Problem Solving*. John Wiley and Sons, Inc.

Ted, S. (2018). *Mathematical Reasoning: Writing and Proof*. Pearson Education, Inc.

Terlochan, S. (1986). *Buku Rujukan dan Kamus Matematik*. Kuala Lumpur, Malaysia. Tropical Press Sdn. Bhd.

Wan Fauzi Wan Mamat. (2010) *Probability*. Visual Print Sdn. Bhd.

Wong, T.S., Moy, W.G., Ooi, S.H., Khoo, C., dan Yong, K.Y. (2005). *SPM Focus U Matematik Tambahan.* Penerbitan Pelangi Sdn. Bhd.

Yap, B. W. dan Nooreha Husain. (1998). *Pengenalan Teori Kebarangkalian*. IBS Buku Sdn. Bhd.

Indeks

Akas *66,67,68*
Akibat *63*
Aliran tunai *274*
Antejadian *63*
Asas Nombor *32*
Aset *274*
Attainable *274,283*
Berbilang tepi *132*
Bucu *130*
Cerapan *219*
Darjah *129*
Data tak terkumpul *219*
Deduktif *71*
Fungsi kuadratik *5*
Garis padu *158*
Garis sempang *158*
Gelung *132*
Graf *130*
Graf berpemberat *137*
Graf jarak-masa *184*
Graf laju-masa *195*
Graf mudah *131*
Graf tak berpemberat *137*
Graf tak terarah *135*
Graf terarah *135*
Hujah *71*
Implikasi *63*
Induktif *72*
Inflasi *285*
Jadual kekerapan *221*
Jangka panjang *272, 274, 275*
Jangka pendek *272, 274, 275*
Jarak *184*
Julat *219*
Julat antara kuartil *219*
Kadar perubahan jarak terhadap masa *184*
Kadar perubahan laju terhadap masa *195*
Kesahan *74*
Kehendak *273*
Kekerapan longgokan *221*
Keperluan *273*
Kesatuan set *106*
Kesimpulan *72*
Ketaksamaan linear *156*
Kontrapositif *66*
Kuadratik *2*
Laju *184*
Laju seragam *187, 200*
Liabiliti *274*
Masa *184, 195*
Matlamat kewangan *272, 273, 274, 275*
Measurable 273, 283
Median *220*
Muflis *285,289*
Nilai digit *36*
Nilai Ekstrem *224*
Nilai kebenaran *56*
Nilai tempat *35*
Nyahpecutan *200*
Paksi simetri *8*
Pecutan *195, 200*
Pegun *187*
Pekali *4*
Pengurusan kewangan *272, 273, 274,*
Pelan kewangan *272, 273, 274*
Pelengkap *100, 110*
Pemalar *3*
Pemboleh ubah *2, 156*
Pemfaktoran *21*
Penafian *59*
Pencilan *224*
Pendapatan aktif *274*
Pendapatan pasif *274*
Penyangkal *69*
Perbelanjaan *272,273,274*
Perbelanjaan tetap *274*
Perbelanjaan tidak tetap *274*
Peristiwa bergabung *244*
Peristiwa bersandar *246*
Peristiwa saling eksklusif *253*
Peristiwa tak bersandar *246*
Peristiwa tidak saling eksklusif *253*
Pernyataan *56, 57, 58, 59, 60*
Pernyataan majmuk *60*
Persamaan kuadratik *15*
Persilangan set *96*
Plot batang-dan-daun *214*
Plot kotak *226*
Plot titik *213*
Pokok *139*
Premis *71*
Punca *16*
Purata laju *189*
Rangkaian *130*
Rantau *158*
Rantau sepunya *169*
Realistic 274, 283
Ruang sampel *244*
Serakan *212*
Sisihan Piawai *221*
Sistem ketaksamaan linear *165*
Songsangan *66*
Subgraf *139*
SMART *273, 279,280*
Specific 273,283
Tepi *130*
Time bound 274,283
Titik maksimum *7*
Titik minimum *7*
Ungkapan *2*
Varians *221*